Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
09.05.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\alpha & 0 & 1-\alpha \\ 0 & 4 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt es eine orthogonale Matrix P so, dass $P^T A_\alpha P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ gilt? Geben Sie das jeweilige P an.

Aufgabe 2

Finden Sie Matrizen mit den folgenden Eigenschaften:

a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und A hat nur den Eigenwert 5.

b) $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und B hat paarweise verschiedene reelle Eigenwerte.

c) $C \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ und $\chi_C(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^3 - 4\lambda$ ist das charakteristische Polynom von C.

d) $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und es gibt nur einen linear unabhängigen Eigenvektor von D.

Aufgabe 3

Gegeben sei ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$. $v \in V \setminus \{0\}$ sei ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

a) v ist ein Eigenvektor von $\varphi + 5\,\mathrm{id}_V$ zum Eigenwert $\lambda + 5$.

b) v ist ein Eigenvektor von φ^n zum Eigenwert λ^n für jedes $n \in \mathbb{N}$. Allgemein gilt für jedes Polynom p, dass v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$ ist.

Hierbei ist φ^n durch $\varphi^n := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{n\text{-mal}}$ definiert.

c) Ist μ^2 ein Eigenwert von φ^2, so ist μ oder $-\mu$ ein Eigenwert von φ.
Hinweis: Betrachten Sie $(\varphi - \mu\,\mathrm{id}_V) \circ (\varphi + \mu\,\mathrm{id}_V)$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1}^{n}, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$