Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2014
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir zeigen zuerst: Ist $n \in \mathbb{N}_0$, dann ist die Funktion $f_n(t) := t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Stellen wir die Exponentialfunktion als Potenzreihe dar, erhalten wir

$$e^{\varepsilon t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon t)^k}{k!} = 1 + \varepsilon t + \frac{(\varepsilon t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\varepsilon t)^n}{n!} + \ldots \geqslant \frac{(\varepsilon t)^n}{n!}$$

für alle $t \geqslant 0$. Folglich ergibt sich mit $M := \frac{n!}{\varepsilon^n}$ die Abschätzung

$$t^n \leqslant M e^{\varepsilon t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Also ist die Funktion f_n von exponentieller Ordnung ε.

Gegeben seien nun $n \in \mathbb{N}_0$ und $s_0 \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s_0) > 0$. Wir wollen die Existenz von $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$ nachweisen.

Wie eben gesehen, ist $f_n(t) = t^n$ von exponentieller Ordnung ε für jedes beliebig vorgegebene $\varepsilon > 0$. Insbesondere ist dann f_n von exponentieller Ordnung $\varepsilon_0 := \operatorname{Re}(s_0)/2$. Das Integral $\int_0^\infty f_n(t)e^{-st}\,dt$ konvergiert (sogar absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \varepsilon_0$. Aufgrund von $\operatorname{Re}(s_0) > \varepsilon$ existiert demnach $\mathscr{L}\{f_n\}(s_0)$.

b) Die Behauptung zeigen wir durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$.

IA: $n = 0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ gilt

$$\mathscr{L}\{f_0\}(s) = \mathscr{L}\{t^0\}(s) = \mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}\,.$$

IS: Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$. Für dieses n gelte: $\mathscr{L}\{f_n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$ (IV). Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_{n+1}\}(s) &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^{n+1}\,dt = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-st}}{-s}\, t^{n+1}\right]_{t=0}^{b} + \frac{n+1}{s} \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} t^n\,dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s} \mathscr{L}\{f_n\}(s) \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n+1}{s}\,\frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{(n+1)+1}}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $a > 0$. Da f von exponentieller Ordnung γ ist, gibt es eine Konstante $M > 0$ so, dass

$$|f(x)| \leqslant M e^{\gamma x}$$

für alle $x \geqslant 0$ gilt. Setzen wir in diese Ungleichung at für x ein, dann erhalten wir

$$|f(at)| \leqslant M e^{(\gamma a)t}$$

für alle $t \geqslant 0$. Damit ist $t \mapsto f(at)$ von exponentieller Ordnung γa, und deshalb konvergiert $\mathscr{L}\{f(at)\}(s)$ (absolut) für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \gamma a$. Mit Hilfe der Substitution $\tau = at$ erkennen wir

$$\mathscr{L}\{f(at)\}(s) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(at)\,dt = \frac{1}{a} \lim_{b\to\infty} \int_0^{ab} e^{-(s/a)\tau} f(\tau)\,d\tau = \frac{1}{a} \mathscr{L}\{f\}\Big(\frac{s}{a}\Big)\,.$$

Aufgabe 3

a) Mit $g(t) := t^2 + bt + c$ erhält man nach Aufgabe 1 aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{t^2\}(s) + b\,\mathscr{L}\{t\}(s) + c\,\mathscr{L}\{1\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,,$$

und wegen $f(t) = e^{at}g(t)$ gilt dann nach der Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{g\}(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3} + \frac{b}{(s-a)^2} + \frac{c}{s-a} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > a\,.$$

b) Wir benutzen die Darstellung $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-i\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-i\omega) + \mathscr{L}\{\sigma\}(s+i\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+i\omega)+(s-i\omega)}{s^2 - i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: a) Mit $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ erhält man $\mathscr{L}\{\sin(\omega t)\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$.
b) Alternativ könnte man $\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\}$ im Fall $\omega > 0$ auch mit $\mathscr{L}\{\cos(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$ und dem Skalierungsresultat aus Aufgabe 2 berechnen: Hiernach gilt nämlich für jedes $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{\omega}\mathscr{L}\{\cos(t)\}\Big(\frac{s}{\omega}\Big) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

c) Es ist $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f\}(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}\{\sigma\}(s-\omega) - \mathscr{L}\{\sigma\}(s+\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{s^2-\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Wir mussten hier $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ fordern, damit sowohl $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ als auch $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von $\mathscr{L}\{e^{\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > \omega$ vor, entsprechend konvergiert $\mathscr{L}\{e^{-\omega t}\}(s)$ nur für $\mathrm{Re}(s) > -\omega$. Beide Bedingungen an s sind für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > |\omega|$ erfüllt.

d) Wir drücken die Funktion f zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}\,.$$

Damit folgt für $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$ (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$4\,\mathscr{L}\{f\}(s) = \mathscr{L}\{e^{2\omega t}\}(s) - \mathscr{L}\{2\}(s) + \mathscr{L}\{e^{-2\omega t}\}(s) = \frac{1}{s-2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2\omega}\,,$$

und als Endergebnis erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2\omega} + \frac{1}{s+2\omega}\right) - \frac{1}{2s} = \frac{s}{2(s^2-4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}\,.$$

Aufgabe 4

a) Für $f(t) := e^{at}$ ergibt sich $\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$.

b) Wir definieren zunächst $g(t) := e^{-2t}$. Dann gilt $\mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s+2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -2$. Ist $f(t) := (\tau_3 g)(t) = \begin{cases} e^{-2(t-3)}\,, & t \geqslant 3 \\ 0\,, & t \in [0,3) \end{cases}$ gesetzt, dann gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s}\mathscr{L}\{g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)\,.$$

c) Aufgrund von $\mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$ und $\mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ bekommen wir mit Hilfe der Linearität von $\mathscr{L}$ und der Dämpfungsregel

$$\begin{aligned}\frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathscr{L}\{\cos(2t)\}(s+1) + \mathscr{L}\{\sin(2t)\}(s+1) \\ &= \mathscr{L}\{\cos(2t)+\sin(2t)\}(s+1) = \mathscr{L}\{e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t))\}(s)\,.\end{aligned}$$

Demnach gilt $\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$ für $f(t) := e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t))$.

Aufgabe 5

Um eine Funktion $y\colon [0,\infty) \to \mathbb{C}$ mit

$$y(t) = t^3 + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \quad \text{für alle } t \geqslant 0$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$y(t) = t^3 + (y * \sin)(t)$$

und wenden die Faltungsregel an. Für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y * \sin\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \mathscr{L}\{y\}(s)\,\mathscr{L}\{\sin\}(s)\,.$$

Hieraus folgt wegen $\mathscr{L}\{t^3\}(s) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\mathscr{L}\{\sin\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s^4} + \mathscr{L}\{y\}(s)\frac{1}{s^2+1} \quad\Longleftrightarrow\quad \mathscr{L}\{y\}(s)\Big(1 - \frac{1}{s^2+1}\Big) = \frac{6}{s^4}$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{s^2+1}{s^2}\cdot\frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}\,.$$

Schließlich erhalten wir mit $\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \frac{5!}{s^6}$

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{t^3\}(s) + \frac{6}{5!}\mathscr{L}\{t^5\}(s) = \mathscr{L}\{t^3 + t^5/20\}(s),$$

d.h. $y(t) = t^3 + \frac{1}{20}t^5$, $t \geqslant 0$, löst die gegebene Gleichung.

Aufgabe 6

a) Gemäß Beispiel in der Vorlesung [mit $a(x) = \sin x$] ist jede Lösung von $y'(x) = y(x)\cdot\sin x$ gegeben durch $y(x) = ce^{-\cos x}$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Dass dies tatsächlich alle Lösungen sind, kann man auch folgendermaßen einsehen: Ist w eine weitere Funktion, die der Gleichung $w'(x) = w(x)\cdot\sin x$ genügt, so gilt

$$\left(\frac{w(x)}{y(x)}\right)' = \frac{w'(x)y(x) - w(x)y'(x)}{y^2(x)} = \frac{w(x)\sin(x)y(x) - w(x)y(x)\sin(x)}{y^2(x)} = 0.$$

Der Quotient w/y ist also konstant, d.h. es gilt $w(x) = Cy(x)$ mit $C \in \mathbb{R}$.

b) Differentiation der Funktionen auf beiden Seiten der Gleichung liefert für jedes $x \in (-1,1)$

$$y'(x) = y(x).$$

(Beachte: y ist differenzierbar, weil die rechte Seite $x \mapsto \int_0^x y(t)\,dt$ nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar ist.)

Laut Beispiel (1) in 18.3 [mit $a(x) = 1$] ist $y(x) = ce^x$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Gemäß der ursprünglichen Gleichung gilt insbesondere für $x = 0$: $c = y(0) = \int_0^0 y(t)\,dt = 0$, d.h. nur $y(x) = 0$ für alle $x \in [-1,1]$ erfüllt die gegebene Gleichung.

Aufgabe 7

a) Bei dieser linearen Differentialgleichung 1. Ordnung betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$x^3 y' + (2 - 3x^2)y = 0, \qquad \text{also} \qquad y' = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{3}{x}\right)y \quad \text{auf } (0,\infty)\,.$$

Diese besitzt die Lösungen $y(x) = Ce^{A(x)}$, wobei C ganz $\mathbb{R}$ durchläuft und A irgendeine Stammfunktion von $a(x) := -2/x^3 + 3/x$ ist. Dies bedeutet für $x > 0$

$$y(x) = C\exp\bigl(x^{-2} + 3\ln x\bigr) = Cx^3 e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Eine spezielle Lösung y_{p} der inhomogenen Gleichung $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$ verschaffen wir uns mit der Methode der Variation der Konstanten: Wir machen den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)y_{\mathrm{h}}(x)$ mit $y_{\mathrm{h}}(x) := x^3e^{1/x^2}$ und erhalten

$$\begin{aligned} x^3y_{\mathrm{p}}' + (2-3x^2)y_{\mathrm{p}} &= x^3\bigl(C'(x)y_{\mathrm{h}} + C(x)y_{\mathrm{h}}'\bigr) + (2-3x^2)C(x)y_{\mathrm{h}} \\ &= x^3C'(x)y_{\mathrm{h}} + \bigl(x^3y_{\mathrm{h}}' + (2-3x^2)y_{\mathrm{h}}\bigr)C(x) = x^3C'(x)y_{\mathrm{h}}\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass y_{h} die homogene Gleichung löst. Damit y_{p} die inhomogene Gleichung löst, muss mithin $x^3C'(x)y_{\mathrm{h}} = x^3$ sein, d. h. es muss

$$C'(x) = 1/y_{\mathrm{h}}(x) = x^{-3}e^{-1/x^2}$$

gelten. Dies ist z.B. für $C(x) = \frac{1}{2}e^{-1/x^2}$ der Fall, und hiermit ergibt sich $y_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{2}x^3$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auf $(0,\infty)$ ist die Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung, also

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + Cy_{\mathrm{h}}(x) = \tfrac{1}{2}x^3 + Cx^3e^{1/x^2} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

b) Die zugehörige homogene Gleichung $y' = (-\cos x)y$ hat die allgemeine Lösung

$$y(x) = C\exp\left(-\int \cos x\,dx\right) = Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Um eine spezielle Lösung y_{p} der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz $y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\sin x}$ (Variation der Konstanten). Dann haben wir

$$y_{\mathrm{p}}' + y_{\mathrm{p}}\cos x = \bigl(C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x\bigr) + C(x)e^{-\sin x}\cos x = C'(x)e^{-\sin x}\,.$$

Somit ist y_{p} eine Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x$ gilt, d. h. wir suchen eine Funktion C mit

$$C'(x) = (\sin x\cos x)e^{\sin x}\,.$$

Partielle Integration (mit $u(x) = \sin x$ und $v'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$) liefert

$$C(x) = (\sin x)e^{\sin x} - \int (\cos x)e^{\sin x}\,dx = (\sin x)e^{\sin x} - e^{\sin x} = (\sin x - 1)e^{\sin x}\,.$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir damit

$$y_{\mathrm{p}}(x) = C(x)e^{-\sin x} = \sin x - 1\,,$$

und die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung lautet dann

$$y(x) = y_{\mathrm{p}}(x) + Ce^{-\sin x} = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x} \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Hier gilt $y(0) = -1 + C$. Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ ist daher für $C = 2$ erfüllt; das Anfangswertproblem hat folglich die Lösung $y(x) = \sin x - 1 + 2e^{-\sin x}$.

Bemerkung: Man könnte hier natürlich auch die Variation-der-Konstanten-Formel verwenden.

c) Hier handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \tfrac{9}{4}\,\lambda = \lambda\big(\lambda^2 + 3\lambda + \tfrac{9}{4}\big) = \lambda\big(\lambda + \tfrac{3}{2}\big)^2$$

besitzt die einfache Nullstelle $\lambda_1 = 0$ und die zweifache Nullstelle $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Somit ist ein Fundamentalsystem von $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$ gegeben durch

$$e^{0\cdot x},\ e^{-\frac{3}{2}x},\ xe^{-\frac{3}{2}x}$$

und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' + 3y'' + \frac{9}{4}\,y' = 0$ lautet

$$y(x) = c_1 + c_2e^{-\frac{3}{2}x} + c_3xe^{-\frac{3}{2}x} \qquad \text{für Konstanten } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\tfrac{3}{2}c_2e^{-\frac{3}{2}x} + c_3e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{3}{2}c_3xe^{-\frac{3}{2}x},\\ y''(x) &= \tfrac{9}{4}c_2e^{-\frac{3}{2}x} - 3c_3e^{-\frac{3}{2}x} + \tfrac{9}{4}c_3xe^{-\frac{3}{2}x}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \overset{!}{=} 0,\\ y'(0) &= -\tfrac{3}{2}c_2 + c_3 \overset{!}{=} 0,\\ y''(0) &= \tfrac{9}{4}c_2 - 3c_3 \overset{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in c_1, c_2, c_3, welches die eindeutige Lösung $c_1 = \frac{4}{9}$, $c_2 = -\frac{4}{9}, c_3 = -\frac{2}{3}$ besitzt. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{9}e^{-\frac{3}{2}x} - \tfrac{2}{3}xe^{-\frac{3}{2}x}.$$

Aufgabe 8

Das System

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v,\\ v' &= 9u - 7v \end{aligned}$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 9 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E_A(-1) = \mathrm{Kern}(A + I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

und

$$E_A(2) = \mathrm{Kern}(A - 2I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Da die Eigenvektoren $(2,3), (1,1)$ von A eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden, ist A diagonalisierbar und für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Außerdem ist

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \ \text{ und } \ \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\Longleftrightarrow \quad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \ \text{ und } \ \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (1).