Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2014
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leqslant (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 \Rightarrow -xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ sowie $0 \leqslant (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2 \Rightarrow xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$] ergibt sich für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\,|y| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

Alternativ: Es gelte $(x_n,y_n) \to (0,0)$ mit $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $r_n > 0$ und $\varphi_n \in [0,2\pi)$ mit $(x_n,y_n) = (r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n)$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(x_n,y_n) = f(r_n\cos\varphi_n, r_n\sin\varphi_n) &= \frac{(r_n\cos\varphi_n)(r_n\sin\varphi_n)^2}{(r_n\cos\varphi_n)^2+(r_n\sin\varphi_n)^2} \\ &= \frac{r_n^3\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n}{r_n^2} = r_n\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

weil $r_n \to 0$ strebt und die Folge $(\cos\varphi_n\sin^2\varphi_n)$ beschränkt ist.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\varphi = 0$ ist $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \to 0 = g(0,0)$ für $r \to 0$. Im Fall $\cos\varphi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.

Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2+(1-y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 2

Es handelt sich um den Schnitt der Oberfläche der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 und der Ebene $x+z=1$; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z=1-x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2+y^2+(1-x)^2=1\,,\quad \text{also}\quad 2x^2-2x+y^2=0\,.$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x-\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y)^2=0\,.$$

Bei dieser Gleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}\cos t,\qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y=\tfrac{1}{2}\sin t\qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Dann haben wir $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z=1-x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t$. Also:

$$\gamma(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos t\\ \sqrt{2}\,\sin t\\ 1-\cos t\end{pmatrix}\qquad (t\in[0,2\pi]).$$

Der Tangentenvektor im Punkt $\gamma(t)$ lautet $\dot\gamma(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \sqrt{2}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$s(t):=\int_0^t\|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sqrt{\sin^2\tau+2\cos^2\tau+\sin^2\tau}\,d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\sqrt{2}\,d\tau=t/\sqrt{2}\qquad (t\in[0,2\pi]),$$

also gilt $L(\gamma)=s(2\pi)=\sqrt{2}\pi$. Wegen $t=t(s)=\sqrt{2}\,s$ ist die Darstellung bezüglich der Bogenlänge (bzw. die natürliche Parametrisierung) gegeben durch

$$\tilde\gamma(s)=\gamma(t(s))=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\cos(\sqrt{2}\,s)\\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\,s)\\ 1-\cos(\sqrt{2}\,s)\end{pmatrix}\qquad (s\in[0,\sqrt{2}\,\pi]).$$

Aufgabe 3

a) Für $-1<t<1$ gilt

$$\dot\gamma(t)=\begin{pmatrix}1/\sqrt{1-t^2}\\ 1\\ -t/\sqrt{1-t^2}\end{pmatrix}.$$

Für $t_0\in(-1,1)$ ist daher

$$\gamma(t_0)+\lambda\dot\gamma(t_0)=\begin{pmatrix}\arcsin t_0\\ t_0\\ \sqrt{1-t_0^2}\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1/\sqrt{1-t_0^2}\\ 1\\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2}\end{pmatrix},\qquad \lambda\in\mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\gamma(t_0)$.

b) Für $t\in[-1,1]$ haben wir

$$s(t):=\int_{-1}^t\|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau=\int_{-1}^t\sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau=\sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-1}^t=\sqrt{2}\,(\arcsin t+\tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve γ die Länge $L(\gamma)=s(1)=\sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$\frac{s}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}=\arcsin t,\qquad \text{also}\qquad t=t(s)=\sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s-\tfrac{\pi}{2})=-\cos(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$$

lautet eine Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge (oder natürliche Parametrisierung)

$$\tilde\gamma(s)=\gamma(t(s))=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s-\frac{\pi}{2}\\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)\\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)\end{pmatrix},\qquad s\in[0,\sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 4

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $x^0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in x^0 in Richtung des ersten Einheitsvektors $e_1 = (1, 0)$, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) &:= \frac{\partial f}{\partial e_1}(x^0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x^0 + te_1) - f(x^0)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f((x, y) + t(1, 0)) - f(x, y)\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x + t, y) - f(x, y)\big).\end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies ist gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x, y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x, y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitungen nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= 6x - 4y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y) &= -8xy + 12y^2\,, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) &= -8xy + 12y^2\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xe^{xy} + (x^2 + y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2ye^{xy} + (x^2 + y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,.\end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y) &= (3x^2 + y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}f(x, y)\,.\end{aligned}$$

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $x^0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $v = (v_1, v_2) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x^0 + tv) - f(x^0)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x + tv_1, y + tv_2) - f(x, y)\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((x + tv_1)^2 + (y + tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2 + y^2)e^{xy}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2 + y^2)e^{xy}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2 + y^2)e^{xy}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2 + y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1 + yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} \\ &\qquad + t^2(v_1^2 + v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big)\,.\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t+\beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t+\beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}-1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t)-g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2) + 2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1 + 0\\ &= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x)+2(x+y)\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ von f stetig sind, ist f nach dem Satz in 19.10 differenzierbar. Deshalb gilt nach dem Satz in 19.9 für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) &= f'(x,y)\,v = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\begin{pmatrix}x^2y+2x+y^3 & x^3+xy^2+2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\ &= e^{xy}\big(x^2y+2x+y^3+x^3+xy^2+2y\big)\\ &= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).\end{aligned}$$

Dies bestätigt unser obiges Ergebnis.

c) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= yz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= xz\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,,\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= xy\sin(x+y+z) + xyz\cos(x+y+z)\,.\end{aligned}$$

d) Hier sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^y/z\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 0\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y,z) &= e^y/z = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x,y,z) &= -e^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x,y,z)\,,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x,y,z)\,.\end{aligned}$$