

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen**

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktionen f , g und h sind für $(x, y) \neq (0, 0)$ durch

$$f(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) := \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad h(x, y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0, 0) := g(0, 0) := h(0, 0) := 0$. Zeigen Sie:

- Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.
- Die Funktion g ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \rightarrow g(0, 0)$ für $r \rightarrow 0$.
- Die Funktion h ist in $(0, 0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \right) \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} h(x, y) \right)$$

existieren und stimmen mit $h(0, 0)$ überein.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Menge aller Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die den Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{und} \quad x + z = 1$$

genügen. Geben Sie eine Parametrisierung dieser Menge an und berechnen Sie eine Darstellung bezüglich der Bogenlänge. Bestimmen Sie außerdem in jedem Kurvenpunkt den Tangentenvektor.

Aufgabe 3

Die Kurve $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}.$$

- Sei $t_0 \in (-1, 1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\gamma(t_0)$ an.
- Berechnen Sie die Länge der Kurve γ und bestimmen Sie die Darstellung von γ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

a) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$ **b)** $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$

c) $f(x, y, z) = xyz \sin(x + y + z)$ **d)** $f(x, y, z) = xe^y/z, \quad z \neq 0$

Berechnen Sie in **a)**, **b)** und **d)** auch die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung von f in Richtung $v = (1, 1)$.