

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen
 Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Erinnerung an die geometrische Reihe: Sei $\omega \in \mathbb{C}$ mit $|\omega| < 1$. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k$ absolut konvergent, und es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{1}{1-\omega}$.

Es seien $T > 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 0$. Setze $A := \int_0^T e^{-st} f(t) dt$ sowie $\omega := e^{-sT}$.

Zu zeigen ist also $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{1-\omega} A$.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt aufgrund der T -Periodizität von f

$$\begin{aligned} \int_0^{(N+1)T} e^{-st} f(t) dt &= \sum_{k=0}^N \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-st} f(t) dt \stackrel{r:=t-kT}{=} \sum_{k=0}^N \int_0^T e^{-s(r+kT)} \underbrace{f(r+kT)}_{=f(r)} dr \\ &= \sum_{k=0}^N e^{-skT} \int_0^T e^{-sr} f(r) dr = \sum_{k=0}^N \omega^k A = A \sum_{k=0}^N \omega^k. \end{aligned}$$

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich wegen $|\omega| = e^{-\operatorname{Re}(s)T} < 1$

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = A \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k = \frac{A}{1-\omega} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Aufgabe 2

- a) i) Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung richtet sich nach den Nullstellen des Nennerpolynoms $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2)$. Diese sind $-1, 0, 2$. Jede dieser Nullstellen ist einfach. Demzufolge lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}.$$

Um die Koeffizienten A, B, C zu ermitteln, haben wir verschiedene Möglichkeiten.

1. *Möglichkeit:* Wir multiplizieren obige Gleichung mit dem Hauptnenner $x(x+1)(x-2)$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

und setzen die Nullstellen des Nennerpolynoms ein

$$\begin{aligned} x = 0 : & \quad -1 = -2A & \iff & \quad A = 1/2 \\ x = -1 : & \quad -1 = 3B & \iff & \quad B = -1/3 \\ x = 2 : & \quad 5 = 6C & \iff & \quad C = 5/6 \end{aligned}$$

2. *Möglichkeit:* Um A , den Koeffizienten des zur Nullstelle $\lambda = 0$ gehörenden Terms $\frac{1}{x}$, zu ermitteln, multipliziert man $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}$ mit $x - \lambda = x$ und bildet dann den Grenzwert $x \rightarrow \lambda$, also $x \rightarrow 0$. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Entsprechend kann man für B und C verfahren

$$B = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x+1) \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 1}{x(x-2)} = -\frac{1}{3},$$

$$C = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x-2) \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}.$$

Mit den Koeffizienten $A = 1/2$, $B = -1/3$ sowie $C = 5/6$ ergibt sich

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{x^2 + x - 1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}.$$

- ii) Wiederum müssen zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt werden. Durch "scharfes Hinsehen" erkennen wir, dass -1 eine solche ist. Polynomdivision liefert $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1)$, und wegen $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ ergibt sich

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2.$$

Damit ist 1 eine einfache Nullstelle und -1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Nach Multiplikation mit $(x-1)(x+1)^2$ ist

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1) = A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 - 1) + C(x-1).$$

Setzen wir die Nullstellen -1 und 1 herein ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} x = -1 : \quad -1 &= -2C & \iff C &= 1/2 \\ x = 1 : \quad 1 &= 4A & \iff A &= 1/4 \end{aligned}$$

Um B zu bestimmen, können wir einen beliebigen anderen Wert für x einsetzen. Wir wählen $x = 0$, weil dann die linke Seite der Gleichung verschwindet:

$$0 = A - B - C = \frac{1}{4} - B - \frac{1}{2} \iff B = -\frac{1}{4}.$$

Alternativ könnten wir zur Bestimmung von A, B, C auch einen Koeffizientenvergleich durchführen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt

$$\begin{aligned} x^2 : \quad 0 &= A + B \\ x : \quad 1 &= 2A + C \\ 1 : \quad 0 &= A - B - C \end{aligned}$$

beziehungsweise geschrieben als

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array} \right).$$

Jedenfalls liefern beide Alternativen $A = 1/4$, $B = -1/4$, $C = 1/2$. Folglich ist

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

- b) Wegen $(x+1)^2(x^3+1) = (x+1)^3(x^2-x+1) = (x+1)^3(x - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})(x - \frac{1-\sqrt{3}i}{2})$ sind -1 eine dreifache Nullstelle und $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ jeweils eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms. Deshalb lautet der Ansatz für die komplexe Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}} + \frac{E}{x - \frac{1-\sqrt{3}i}{2}}.$$

(In der Notation der Vorlesung geschrieben: $P(x) = 1$, $Q(x) = (x+1)^2(x^3+1)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ und $\lambda_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 1$ sowie $\alpha_1^{(1)} = A$, $\alpha_2^{(1)} = B$, $\alpha_3^{(1)} = C$, $\alpha_1^{(2)} = D$ und $\alpha_1^{(3)} = E$.) Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{9}$, $E = -\frac{1}{9}$.

Der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{\tilde{D}x + \tilde{E}}{x^2-x+1}.$$

Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $\tilde{D} = -\frac{2}{9}$, $\tilde{E} = \frac{1}{9}$.

Aufgabe 3

- a) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right).$$

Wegen $\mathcal{L}\{e^{1 \cdot t}\}(s) = \frac{1}{s-1}$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ und $\mathcal{L}\{e^{(-1) \cdot t}\}(s) = \frac{1}{s+1}$ für $\operatorname{Re}(s) > -1$ erhalten wir für $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{e^{1 \cdot t}\}(s) - \mathcal{L}\{e^{(-1) \cdot t}\}(s) \right) = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \right\}(s) = \mathcal{L}\{\sinh(t)\}(s).$$

Alternativ: Nach der Faltungsregel gilt für $\operatorname{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1} \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\{e^t\}(s) \mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) = \mathcal{L}\{g_1\}(s) \mathcal{L}\{g_2\}(s) = \mathcal{L}\{g_1 * g_2\}(s)$$

wobei $g_1(t) := e^t$ und $g_2(t) := e^{-t}$ gesetzt seien. Also fanden wir mit der Faltung $g_1 * g_2$ eine Funktion mit $\mathcal{L}\{g_1 * g_2\}(s) = \frac{1}{s^2-1}$. Nun müssen wir noch $g_1 * g_2$ berechnen. Für $t \geq 0$ ist

$$\begin{aligned} (g_1 * g_2)(t) &= \int_0^t g_1(t-u)g_2(u) du = \int_0^t e^{t-u}e^{-u} du = e^t \int_0^t e^{-2u} du \\ &= e^t \left(-\frac{1}{2}e^{-2u} \right) \Big|_{u=0}^t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t). \end{aligned}$$

- b) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

erkennen wir für $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^{-2t}\}(s) = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \right\}(s).$$

Alternativ: Wir können den b)-Teil auch lösen, indem wir die Dämpfungsregel auf das Resultat des a)-Teils anwenden. Es gilt nämlich für alle $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2+2s} &= \frac{1}{(s+1)^2-1} \stackrel{\text{a)}}{=} \mathcal{L}\{\sinh(t)\}(s+1) = \mathcal{L}\{e^{-1 \cdot t} \sinh(t)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{ e^{-1 \cdot t} \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \right\}(s) = \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \right\}(s). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

- a) Aus der Vorlesung kennen wir die Identität

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

für eine exponentiell beschränkte, n -mal stetig differenzierbare Funktion f und hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$. Insbesondere haben wir also

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s \mathcal{L}\{y\}(s) - y(0) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0).$$

Für die Lösung y mit den Anfangswerten $y(0) = 7$ und $y'(0) = 1$ bedeutet dies

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s \mathcal{L}\{y\}(s) - 7 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) - 7s - 1.$$

Somit ergibt sich für die Lösung y des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{12}{s} &= \mathcal{L}\{12\}(s) = \mathcal{L}\{y'' + 4y' + 3y\}(s) = (s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) - 7s - 1) + 4(s \mathcal{L}\{y\}(s) - 7) + 3 \mathcal{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2 + 4s + 3) \mathcal{L}\{y\}(s) - 7s - 29, \end{aligned}$$

also

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3} \left(7s + 29 + \frac{12}{s} \right) = \frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)}.$$

Nun wollen wir eine Partialbruchzerlegung durchführen; wir machen den Ansatz

$$\frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s und setzen $s = 0$ ein, so folgt $A = \frac{12}{3} = 4$. Multiplikation mit $s+1$ und Einsetzen von $s = -1$ liefert $B = \frac{-10}{-2} = 5$, und ganz analog erhält man schließlich noch $C = \frac{-12}{6} = -2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{4}{s} + \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3} = \mathcal{L}\{4\}(s) + \mathcal{L}\{5e^{-t}\}(s) - \mathcal{L}\{2e^{-3t}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\}(s), \end{aligned}$$

und wir haben die Lösung y gefunden: Es ist

$$y(t) = 4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}.$$

- b) Wegen $y(0) = y'(0) = 0$ erhält man hier $\mathcal{L}\{y'\}(s) = s \mathcal{L}\{y\}(s)$ und $\mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2 \mathcal{L}\{y\}(s)$ für hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$, und mit $y''(0) = 1$ ergibt sich

$$\mathcal{L}\{y'''\}(s) = s^3 \mathcal{L}\{y\}(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3 \mathcal{L}\{y\}(s) - 1.$$

Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned} \frac{1}{s-1} &= \mathcal{L}\{e^t\}(s) = \mathcal{L}\{y''' - 3y'' + 3y' - y\}(s) \\ &= (s^3 \mathcal{L}\{y\}(s) - 1) - 3s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) + 3s \mathcal{L}\{y\}(s) - \mathcal{L}\{y\}(s) \\ &= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1) \mathcal{L}\{y\}(s) - 1 = (s-1)^3 \mathcal{L}\{y\}(s) - 1, \end{aligned}$$

und dies führt auf

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{(s-1)^3} \left(1 + \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt bekanntlich

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0),$$

und mit der Dämpfungsregel folgt

$$\frac{1}{(s-1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \mathcal{L}\{t^n\}(s-1) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}\{e^t t^n\}(s) \quad (\operatorname{Re}(s) > 1).$$

Hiermit bekommen wir

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{2} \mathcal{L}\{e^t t^2\}(s) + \frac{1}{6} \mathcal{L}\{e^t t^3\}(s) = \mathcal{L}\{e^t(t^2/2 + t^3/6)\}(s),$$

d.h. die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = e^t(t^2/2 + t^3/6).$$

c) Man erhält mit $c := y'(0)$ für hinreichend große $\operatorname{Re}(s)$

$$\mathcal{L}\{y'\}(s) = s \mathcal{L}\{y\}(s) - 6 \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{y''\}(s) = s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) - 6s - c.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{6}{(s+1)^2} &= \mathcal{L}\{6te^{-t}\}(s) = \mathcal{L}\{y'' + 2y' + y\}(s) \\ &= (s^2 \mathcal{L}\{y\}(s) - 6s - c) + 2(s \mathcal{L}\{y\}(s) - 6) + \mathcal{L}\{y\}(s) \\ &= (s^2 + 2s + 1) \mathcal{L}\{y\}(s) - 6s - c - 12. \end{aligned}$$

Für die Lösung y der Differentialgleichung mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = c$ hat man also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 1} \left(6s + c + 12 + \frac{6}{(s+1)^2} \right) = \frac{6(s+1) + c + 6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} \\ &= \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \mathcal{L}\{t^n\}(s+1) = \frac{1}{n!} \mathcal{L}\{e^{-t} t^n\}(s) \quad (\operatorname{Re}(s) > -1, n \in \mathbb{N}_0)$$

schließt man

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} = \mathcal{L}\{6e^{-t} + (c+6)te^{-t} + t^3e^{-t}\}(s),$$

d.h. es ist $y(t) = (6 + (c+6)t + t^3)e^{-t}$. Bei dieser Funktion gilt $y(1) = (13+c)e^{-1}$, und für $c = 0$ wird die Bedingung $y(1) = 13/e$ erfüllt. Die Lösung des Problems ist demzufolge

$$y(t) = (6 + 6t + t^3)e^{-t}.$$

Aufgabe 5

a) Da die gebrochenrationale Funktion $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s} \bullet \circ f(t)$ die einfachen Polstellen $-2, -1, 0$ besitzt, ist $f(t)$ eine Linearkombination von $e^{-2t}, e^{-t}, e^{0t} = 1$. Hieraus folgt, dass f stückweise stetig ist und dass $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert. Der Endwertsatz liefert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \mathcal{L}\{f\}(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s^2 + 1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{2}.$$

b) Nach einer Partialbruchzerlegung von $\frac{(s+2)(s+1)}{(s^2+1)s} \bullet \circ f(t)$ sehen wir, dass $f(t)$ eine Linearkombination von e^{it} , e^{-it} , 1 (komplexe PBZ) bzw. von $\sin t$, $\cos t$, 1 (reelle PBZ) ist. Deshalb existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ nicht.

c) Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung von $\frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ und der inversen Laplacetransformation erkennen wir, dass die Funktion f mit $f(t) \circ \bullet \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)s}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt ist. Mit dem Anfangswertsatz schließen wir

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}\{f\}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2+1}{(s+2)(s+1)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1+1/s^2}{1+3/s+2/s^2} = 1.$$

d) Wir zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ nicht existiert. Würde nämlich $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ existieren, dann müsste nach dem Anfangswertsatz

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}\{f\}(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} 2\sqrt{s} < \infty$$

gelten. Dies ist ein Widerspruch! Demzufolge existiert $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ nicht.

Aufgabe 6

a) Bei der Funktion f ergibt sich für eine Richtung $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wegen $f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}.$$

Ist v so gewählt, dass $v_1 v_2 \geq 0$ gilt, dann hat man $tv_1 \cdot tv_2 \geq 0$ für alle $t \neq 0$ und damit nach Definition von f

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1}{t} = v_1.$$

Ist dagegen $v_1 v_2 < 0$, so erhält man $tv_1 \cdot tv_2 < 0$ für alle $t \neq 0$, also

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tv_1 + tv_2}{t} = v_1 + v_2.$$

Für die Funktion f existieren folglich alle Richtungsableitungen im Punkt $(0,0)$.

b) Wir bestimmen zunächst $f'(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0, y_0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = -1 \quad \text{und} \quad f'(x_0, y_0)v = \frac{\partial f}{\partial v} f(x_0, y_0) = 2.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := f_x(x_0, y_0)$ und $\beta := f_y(x_0, y_0)$, so ist $f'(x_0, y_0) = (\alpha \ \beta)$, also $f'(x_0, y_0)u = \alpha + 2\beta$ und $f'(x_0, y_0)v = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen liefern daher

$$\alpha + 2\beta = -1 \quad \text{und} \quad -\alpha + \beta = 2.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Folglich ist $f'(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3} \ \frac{1}{3})$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial w}(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)w = \left(-\frac{5}{3} \ \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung h gegeben durch

$$h = \frac{\text{grad } f(x_0, y_0)}{\|\text{grad } f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

- a) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig; es bleibt noch der Nullpunkt zu prüfen. Ist $(x, y) \neq (0, 0)$ und $z := \max\{|x|, |y|\}$, so gilt

$$|f(x, y)| = \left| \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|y^3| + |x^2y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{z^3 + z^3}{z^2} = 2z = 2 \max\{|x|, |y|\},$$

und damit folgt $f(x, y) \rightarrow 0 = f(0, 0)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

- b) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$f_x(x, y) = \frac{-2xy(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ haben wir also

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 \\ -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix}.$$

Nun noch zum Nullpunkt: Definitionsgemäß gilt

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^3 - 0}{0 + h^2} = 1.$$

Somit ist f auch in $(0, 0)$ partiell differenzierbar mit

$$\text{grad } f(0, 0) = \begin{pmatrix} f_x(0, 0) \\ f_y(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- c) Wegen

$$f_x(x, x) = \frac{-4x^4}{(x^2 + x^2)^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \neq 0 = f_x(0, 0),$$

$$f_y(x, 0) = \frac{-x^4 + 0 + 0}{(x^2 + 0)^2} = -1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1 \neq 1 = f_y(0, 0)$$

ist weder f_x noch f_y im Punkt $(0, 0)$ stetig.

- d) Es sei $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + hv) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 v_2^3 - h^3 v_1^2 v_2}{h^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\text{grad } f(0, 0)) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2 (v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

- e) Nicht für alle Richtungen v gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = (\text{grad } f(0,0)) \cdot v$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste die Gleichung für alle Richtungen gelten. Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar mit

$$f'(x,y) = (\text{grad } f(x,y))^T = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (-4xy^3 \quad -x^4 + 4x^2y^2 + y^4).$$

Aufgabe 8

- a) Für die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin(|t|^{-1}) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \sin(|t|^{-1}) = 0,$$

weil $\sin(|t|^{-1})$ beschränkt ist, und aufgrund von $f(x,y) = f(y,x)$ ist $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$.

Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $(0,0)$, wenn es eine lineare Abbildung $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, also $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, gibt mit

$$\frac{|f(h_1, h_2) - f(0,0) - A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}|}{\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \|} \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} 0. \quad (*)$$

Wegen $f_x(0,0) = 0$ und $f_y(0,0) = 0$ ist $A = (0 \ 0)$ unser Kandidat für die Ableitung von f in $(0,0)$. In der Tat ist $(*)$ für dieses A erfüllt, denn es gilt $f(0,0) = 0$ und $A \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$ sowie

$$\frac{|f(h_1, h_2)|}{\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \|} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \| \sin \frac{1}{\| \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \|} \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} 0.$$

- b) Für die partielle Ableitung von f nach x ergibt sich im Fall $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x \sin(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2) \cos(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot (-\frac{1}{2})(x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2x \\ &= 2x \sin(x^2 + y^2)^{-1/2} - x(x^2 + y^2)^{-1/2} \cos(x^2 + y^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Damit hat man für $x \neq 0$

$$f_x(x,0) = 2x \sin(|x|^{-1}) - x|x|^{-1} \cos(|x|^{-1}).$$

Ist $x_k := \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, gesetzt, so strebt $x_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, allerdings konvergiert $f_x(x_k, 0) = 2\frac{1}{k\pi} \sin(k\pi) - \cos(k\pi) = -(-1)^k$ für $k \rightarrow \infty$ nicht. Folglich ist f_x in $(0,0)$ nicht stetig. Aus Symmetriegründen ($f(x,y) = f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) gilt dies auch für f_y .

Bemerkung: Die Funktion f ist ein Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar ist, jedoch nicht stetig partiell differenzierbar ist. Wenn man also weiß, dass eine Funktion nicht stetig partiell differenzierbar ist, dann kann man keine Aussage über Differenzierbarkeit treffen.

Aufgabe 9

- a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \leq |xy|$ und damit folgt $f(x,y) \rightarrow 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

b) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy \frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

und wegen $f(x, y) = -f(y, x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(y+h, x) + f(y, x)}{h} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h, x) - f(y, x)}{h} = -f_x(y, x) = -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt also

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Somit ist $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$.

c) Es ist

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2 + 0)^2} = 1$$

sowie

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 + 0 - h^5}{h(0 + h^2)^2} = -1.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\text{grad } f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3y^2 - xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x, y) = (\text{grad } f(x, y))^T = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} (x^4y + 4x^2y^3 - y^5 \quad x^5 - 4x^3y^2 - xy^4).$$

Weiter ist bekannt: $\text{grad } f(0, 0) = (0, 0)$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$ sei $z := \max\{|x|, |y|\}$. Es gilt

$$|f_x(x, y)| = \frac{|x^4y + 4x^2y^3 - y^5|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{z^5 + 4z^5 + z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6 \max\{|x|, |y|\}.$$

Damit folgt $f_x(x, y) \rightarrow 0 = f_x(0, 0)$ für $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Genauso sieht man ein, dass f_y in $(0, 0)$ stetig ist. Also ist f in $(0, 0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0, 0) = (0, 0)$.

e) Die Funktion f kann nicht zweimal stetig differenzierbar sein, denn sonst müssten f_{yx} und f_{xy} nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach c) nicht der Fall ist.