Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014
12.06.2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0, 0, -2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x, y)$ die Ableitung $g'(x, y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen $x^2+y^2-u^2+v^2 = 0$ und $x^2+2y^2-3u^2+4v^2 = 1$.

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0, 0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ mit $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0, 0)$.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^z - y^2$, in $x^0 = (1, -1, 0)$.

b) Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(x) \sin(y)\, e^{x-y}$, in $x^0 = (0, 0)$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x, y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x, y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x, y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$

Aufgabe 4

Es sei $Q := [0, 5] \times [0, 5] \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x, y) = x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2\,.$$

Begründen Sie, dass f auf Q Maximum und Minimum besitzt, und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 5

Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x, y, z) = (z^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

Bestimmen Sie Minimum und Maximum von f auf der Menge

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}\,.$$

Hinweis: Wenn Sie f auf dem Rand von B untersuchen, dann können Sie dies vereinfachen, indem Sie f dort geeignet darstellen.