Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x,y,z) := \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \qquad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel aus 19.21 erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla\times\vec{g} = \nabla\times(f\vec{v}\,) = f(\nabla\times\vec{v}\,) + (\nabla f)\times\vec{v}$. Offenbar ist $\nabla\times\vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f)\times\vec{v} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{g} &= \nabla\cdot\vec{g} = \nabla\cdot(f\vec{v}\,) = f(\nabla\cdot\vec{v}\,) + (\nabla f)\cdot\vec{v} \\ &= 3f + \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Für $r>0$ und $\varphi\in(-\pi,\pi)$ gilt

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(g(r,\varphi)) = u\circ g(r,\varphi)$$

mit $g\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\to\mathbb{R}^2$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r,\varphi) = u'(g(r,\varphi))\cdot g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r,\varphi)) & u_y(g(r,\varphi)) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mit $v'(r,\varphi) =: (v_r(r,\varphi) \;\; v_\varphi(r,\varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} v_r(r,\varphi) &= \cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ v_\varphi(r,\varphi) &= -r\sin\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &\qquad + \sin\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\big) \\ &= \cos^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) = {} & -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\
& - r\sin\varphi\,\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\
& - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\
& + r\cos\varphi\,\big(u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\big) \\
= {} & -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\
& + r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\
& + r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi).
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\,(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\,(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\,(r,\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\, v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \\
&\quad = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\big(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) \\
&\quad = u_{xx}(x,y) + u_{xx}(x,y) = \Delta u(x,y)
\end{aligned}$$

mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Aufgabe 3

a) Mit $\dot\gamma(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
&\|\dot\gamma(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} \\
&\quad = \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.
\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\, ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, \|\dot\gamma(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\, dt = \big[\tfrac13(2+t^2)^{3/2}\big]_0^{2\pi} = \tfrac13\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big) \\
&= \tfrac23\sqrt2\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.
\end{aligned}$$

b) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{2\pi} \vec v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t\sin t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\, dt = \big[e^{\cos t} - \tfrac13\cos^3 t\big]_0^{2\pi} = 0\,.
\end{aligned}$$

ii) Auch hier benutzen wir die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s = \int_0^{\ln 2} \vec v(\gamma(t))\cdot\gamma(t)\, dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix} \cosh t \\ -\sinh t \\ \sinh t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ \cosh t\end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\, dt = \int_0^{\ln 2} (1 + \sinh t\cosh t)\, dt \\
&= \ln 2 + \big[\tfrac12\sinh^2 t\big]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac12\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac12\big(\tfrac12(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.
\end{aligned}$$

iii) Die Kurven $\gamma_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (t,0)$, und $\gamma_2 \colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär und es gilt $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung 20.1 (d) vor:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t)\,dt + \int_1^2 \vec{v}(\gamma_2(t)) \cdot \dot{\gamma}_2(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix} \sin 1 \\ 1+(t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 \sin t\,dt + \int_1^2 \big(1+(t-1)^2\big)\,dt \\
&= \big[-\cos t\big]_0^1 + \big[t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\big]_1^2 = (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung aus Satz 2 in 20.4 erfüllt ist. (Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet.) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad \partial_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq \partial_y v_3(x,y,z)$$

ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d. h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2\,, \qquad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3\,, \qquad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 5

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z|=2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im konvexen Gebiet $G=\mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz &= \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-(-i)}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\bigg|_{z=-i} - 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\bigg|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\Big)\,.$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\bigg(\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz - \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z+2}\,dz\bigg) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

Aufgabe 6

Anhand einer komplexen Partialbruchzerlegung erkennen wir

$$F(z) = \frac{1+i}{z^2-z-iz+i} = \frac{i}{z-1} + \frac{-i}{z-i}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{1,i\}\,.$$

Nun erweitern wir den zweiten Summanden mit i und verwenden für $|z|<1$ zweimal die Formel der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned}F(z) \quad &= \quad \frac{i}{z-1} + \frac{1}{iz+1} = -i\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-(-iz)} \\ &\overset{|-iz|=|z|<1}{=} \quad -i\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-iz)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\big(-i+(-i)^k\big)z^k\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Die Funktion

$$F(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

hat in $z_0 = 1$ eine Polstelle zweiter Ordnung. Gemäß 24.13 (a) lässt sich das Residuum von F in $z_0=1$ bestimmen durch

$$\operatorname{res}(F;1) = \bigg(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2F(z)\Big)\bigg)\bigg|_{z=1} = \bigg(\frac{d}{dz}\Big((z+1)^2\Big)\bigg)\bigg|_{z=1} = \Big(2(z+1)\Big)\Big|_{z=1} = 4\,.$$

Alternativ können wir auch die Laurententwicklung von F um $z_0=1$ berechnen

$$\begin{aligned}F(z) &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} = \frac{z^2-2z+1}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-1)^2} \\ &= 1 + \frac{4(z-1+1)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2}\end{aligned}$$

und hieran $\operatorname{res}(F;1) = 4$ ablesen.

b) Die Funktion

$$F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2} \quad (a \in \mathbb{C} \text{ fest})$$

besitzt in $z_0 = 1$ einen Pol zweiter Ordnung. Für das Residuum von F in 1 ergibt sich

$$\operatorname{res}(F;1) = \left(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2F(z)\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz}\Big(ze^{az}\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \Big(e^{az} + zae^{az}\Big)\bigg|_{z=1} = (1+a)e^a\,.$$

Aufgabe 8

a) Der Integrand $F(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.

Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1) = \frac{\mathrm{e}\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von F in 1 gilt

$$\operatorname{res}(F;1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=9} F(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;-3)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e - 5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(F;-3) &= \left(\frac{d}{dz}\,(z+3)^2F(z)\right)\bigg|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz}\,\frac{e^z}{z-1}\right)\bigg|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1) - e^z}{(z-1)^2}\right)\bigg|_{z=-3} \\ &= \frac{-5e^{-3}}{16}\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $F(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $F(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\int_{|z|=1} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;0)\,.$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$F(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\big(1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \cdots\big) - 1} = \frac{z}{iz - \frac{1}{2}z^2 + \cdots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}z + \cdots}\,,$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{res}(F;0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.