Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint_B d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^{2} \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\,dx = \int_{-6}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\,dx$$
$$= \big[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\big]_{-6}^{2} = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

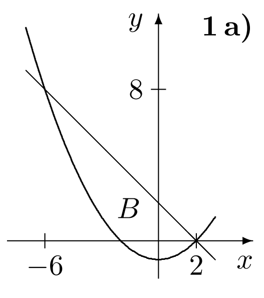
$$\iint_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\,dy = \big[4y - \tfrac{2}{3}y^3\big]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,.$$

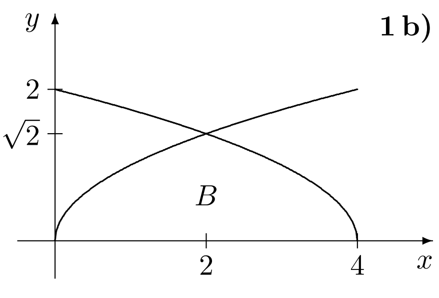
Aufgabe 2

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 in 20.5 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \big[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\big]_{y=0}^{1}\,dx$$
$$= \int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\big)\,dx = \big[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\big]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}\,.$$





b) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2} \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^{2}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \big(\sinh(2x+2)-\sinh(2x)\big)\,dx = \big[\tfrac12\cosh(2x+2)-\tfrac12\cosh(2x)\big]_{-1}^{0}$$

$$= \big(\tfrac12\cosh 2-\tfrac12\cosh 0\big)-\big(\tfrac12\cosh 0-\tfrac12\cosh(-2)\big) = \cosh 2 - 1\,.$$

Rechnet man den hyperbolischen Cosinus noch aus, so erhält man $\frac12(e^2+e^{-2})-1$.

Aufgabe 3

Da der Integrand jeweils eine stetige Funktion ist, kann man die Integrationsreihenfolge nach Satz 2 in 20.5 vertauschen.

a) Es gilt

$$\int_0^1\int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^x dy\,e^{x^2}\,dx = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \big[\tfrac12 e^{x^2}\big]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

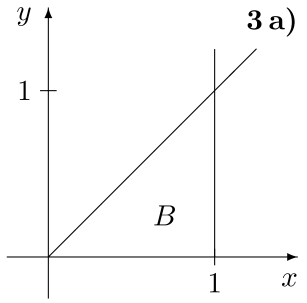
$$\int_0^1\int_y^{y^2+1} x^2y\,dx\,dy = \iint\limits_{B_1} x^2y\,d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2y\,d(x,y)$$

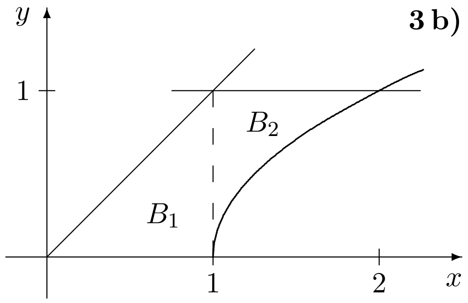
$$= \int_0^1\int_0^x x^2y\,dy\,dx + \int_1^2\int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2y\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \big[\tfrac12x^2y^2\big]_{y=0}^{x}\,dx + \int_1^2 \big[\tfrac12x^2y^2\big]_{y=\sqrt{x-1}}^{1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \tfrac12x^4\,dx + \int_1^2 \big(\tfrac12x^2-\tfrac12x^2(x-1)\big)\,dx$$

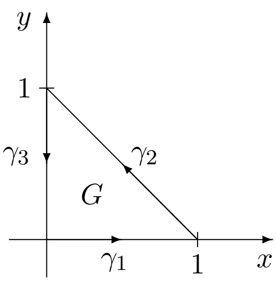
$$= \big[\tfrac1{10}x^5\big]_{x=0}^1 + \big[-\tfrac18x^4+\tfrac13x^3\big]_{x=1}^2 = \tfrac1{10} + \big(-2+\tfrac83+\tfrac18-\tfrac13\big) = \tfrac{67}{120}\,.$$





Aufgabe 4

Zunächst berechnen wir $\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (t,0)\,,\\
\gamma_2 &\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (2-t,t-1)\,,\\
\gamma_3 &\colon [2,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (0,3-t)\,.
\end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0,1) = \gamma_3(2)$. Der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist gegeben durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (im Sinne von Bemerkung 20.1 (d)). Deshalb ist

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t))\cdot\dot{\gamma}_1(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t\cdot 0 \\ t^2\cdot 0 - 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2 + (2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1) - (t-1)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3 - 6t^2 + 10t - 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_1^2 \big(t^3 - 6t^2 + 11t - 7\big)\,dt = \Big[\frac{1}{4}\,t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2}\,t^2 - 7t\Big]_1^2 = -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2\,dt = \Big[-\frac{1}{3}\,(3-t)^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6 erfüllt sind. Dieser liefert

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big)\,d(x,y) = \iint\limits_G (2xy - x)\,d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x)\,dy\,dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\,dx \\
&= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint\limits_G (x^2 + y)\,d(x,y) = \iint\limits_G (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y))\,d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_G (x^2+y)\,d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\,\sin t \\ \cos t\,\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\,\sin^2 t + \sin t \cos^2 t\big)\,dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \big(\tfrac{1}{4}\sin^2(2t) + \sin t \cos^2 t\big)\,dt \\
&= \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\,dt - \big[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du \\
&= \tfrac{1}{8}\bigg(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du + \tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du\bigg) \\
&\overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8}\bigg(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \sin^2(u)\,du + \tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} \cos^2(u)\,du\bigg) \\
&= \tfrac{1}{8}\bigg(\tfrac{1}{2}\int_0^{4\pi} 1\,du\bigg) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{4\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2\sin t\,\cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{4\pi} \sin^2 t\,dt = \int_0^{4\pi} \cos^2 t\,dt$.