Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter

Sommersemester 2014

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) • Mit $\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\operatorname{Arg}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ ergibt sich

$$(1+i)^i = e^{i\operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+i\pi/4)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\pi/4} = e^{-\pi/4}\big(\cos(\ln\sqrt{2}\,) + i\sin(\ln\sqrt{2}\,)\big)\,.$$

Man liest ab: $\operatorname{Re}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\cos(\frac{1}{2}\ln 2)$ und $\operatorname{Im}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\sin(\frac{1}{2}\ln 2)$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = \ln|i| + i\operatorname{Arg} i = i\pi/2$ gilt $i^i = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$, also

$$i^{(i^i)} = i^{(e^{-\pi/2})} = \exp(e^{-\pi/2}\operatorname{Log} i) = \exp(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2} i) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2}) + i\sin(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})\,.$$

Man sieht: $\operatorname{Re}(i^{(i^i)}) = \cos(\frac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})$ und $\operatorname{Im}(i^{(i^i)}) = \sin(\frac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = i\pi/2$ ergibt sich

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) = \operatorname{Log}(i\pi/2) = \ln|i\pi/2| + i\operatorname{Arg}(i\pi/2) = \ln(\pi/2) + i\pi/2\,.$$

Damit erhalten wir

$$(\operatorname{Log} i)^i = e^{i\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)} = e^{i\ln(\pi/2)-\pi/2} = e^{-\pi/2}\cos\big(\ln(\pi/2)\big) + ie^{-\pi/2}\sin\big(\ln(\pi/2)\big)\,,$$

und Real- und Imaginärteil können unmittelbar abgelesen werden.

b) Die Gleichung $e^{1/z} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{z} = i\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\,\frac{(1+4k)\pi}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad z = -i\,\frac{2}{(1+4k)\pi}$$

mit einem gewissen $k\in\mathbb{Z}$ gilt, d.h. $\{z\in\mathbb{C} :\ e^{1/z} = i\} = \{\frac{-2i}{(1+4k)\pi} :\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 2

Die Fläche $\mathcal{F} = \big\{(x,y,f(x,y)) :\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leqslant 1\big\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x,y) = x^2+y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec g(x,y) :\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ mit

$$\vec g(x,y) = \begin{pmatrix} x\\ y\\ f(x,y)\end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{F}) &= \iint_{\mathcal{F}} do = \iint_B \|\partial_x\vec g(x,y)\times\partial_y\vec g(x,y)\|\,d(x,y) = \iint_B \Big\|\begin{pmatrix}1\\0\\\partial_x f(x,y)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\\partial_y f(x,y)\end{pmatrix}\Big\|\,d(x,y)\\
&= \iint_B \Big\|\begin{pmatrix}-\partial_x f(x,y)\\-\partial_y f(x,y)\\1\end{pmatrix}\Big\|\,d(x,y) = \iint_B \sqrt{(\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2 + 1}\,d(x,y)\\
&= \iint_B \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,d(x,y).
\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A(\mathcal{F}) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4r^2+1}\, r\, d(r,\varphi) = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = 2\pi \left[\tfrac{1}{12}\,(4r^2+1)^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2}-1).$$

Aufgabe 3

Seien $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z+2)^2 \leqslant 3,\, z = \frac{1}{2}(x^2+y^2)-2,\, x \geqslant 0\right\}$ und

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y+z^2 \\ x-2z \\ -2xz+2y+2z \end{pmatrix}.$$

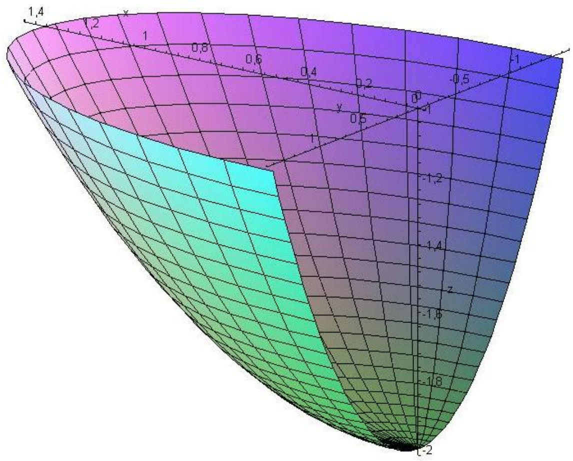
$\mathcal{F}$ bezeichne die Oberfläche von B und $\vec{N}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}$.
Ist die Orientierung von $\partial\mathcal{F}$ an den Normaleneinheitsvektor $\vec{N}$ angepasst, so gilt nach dem Integralsatz von Stokes

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{N}\, do = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Eine Parametrisierung von $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}\colon V \to \mathbb{R}^3,\ \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \frac{1}{2}r^2-2 \end{pmatrix}$$

mit $V := [0,\sqrt{2}] \times [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. (Hierbei erhält man die Bedingung $r \in [0,\sqrt{2}]$ aus der Ungleichung $x^2+y^2+(z+2)^2 \leqslant 3$ und die Forderung $\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ aus $x \geqslant 0$.)



Der Rand $\partial\mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ besteht aus zwei Kurvenstücken: einem Halbkreis in der Ebene $z = -1$ mit Radius $\sqrt{2}$ und einem Parabelstück der Parabel $z = \frac{1}{2}y^2 - 2$ in der Ebene $x = 0$. Eine Parametrisierung des Halbkreises ist

$$\gamma_1\colon [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_1(\varphi) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\varphi \\ \sqrt{2}\sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix}$$

(nehme $r = \sqrt{2}$) und eine Parametrisierung des Parabelstücks lautet

$$\gamma_2\colon [-\sqrt{2},\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^3,\ \gamma_2(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ \frac{1}{2}r^2-2 \end{pmatrix}$$

(nehme $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$). Die Orientierung von γ_1 entspricht allerdings noch nicht der Rechtsschraubenregel. $\partial\mathcal{F}$ wird durch $-\gamma_1$ und γ_2 korrekt parametrisiert (vgl. Skizze). Daher ist

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{-\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\gamma_1(\varphi))\cdot\dot{\gamma}_1(\varphi)\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 2\cos^2\varphi + \sqrt{2}\sin\varphi + 1 \\ \sqrt{2}\cos\varphi + 2 \\ 2\sqrt{2}\cos\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\varphi \\ \sqrt{2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi - 2\sin^2\varphi - \sqrt{2}\sin\varphi + 2\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi\big)\,d\varphi \\ &\overset{(*)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big(-2\sqrt{2}\cos^2\varphi\,\sin\varphi + 2\cos(2\varphi) - \sqrt{2}\sin\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi\big)\,d\varphi \\ &= \Big[\tfrac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3\varphi + \sin(2\varphi) + \sqrt{2}\cos\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\end{aligned}$$

(in $(*)$ verwendeten wir das Additionstheorem des Cosinus: $\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$) sowie

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{v}(\gamma_2(r))\cdot\dot{\gamma}_2(r)\,dr = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} r + (\frac{1}{2}r^2 - 2)^2 \\ -r^2 + 4 \\ 2r + r^2 - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix} dr \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \big(-r^2 + 4 + 2r^2 + r^3 - 4r\big)\,dr \\ &= \Big[\tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{1}{3}r^3 - 2r^2 + 4r\Big]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \tfrac{4}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Damit ist

$$\iint_{\mathcal{F}} (\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{N}\,do = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = -4\sqrt{2} + \tfrac{4}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = \tfrac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 4

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v}\cdot\vec{N}\,do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big)\,(-1) = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi]\times[0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u \, \sin u \\ v \cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u \, \sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iint\limits_{U} \cos^2 u \, \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1} \, d(u,v) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 u \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u \, du = \pi \,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u \cos v, u \sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big) = u^2 \cos^2 v \,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do &= \iint\limits_{U} u^2 \cos^2 v \, \underbrace{\|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\|}_{=|u|=u, \text{ da } u \geqslant 0} \, d(u,v) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v \, dv \, du \\ &= \left(\int_0^1 u^3 \, du \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v \, dv \right) = \tfrac{1}{4}\pi \,. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi \,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iiint\limits_{Z} (\nabla \cdot \vec{v}\,) \, d(x,y,z) \,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2 y) + \partial_z(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N} \, do = \iiint\limits_{Z} 5x^2 \, d(x,y,z) &= \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2 \, r \, d(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2\varphi \, dz \, d\varphi \, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2 \varphi \, d\varphi \, dr \\ &= 5 \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \right) = \tfrac{5}{4}\pi \,. \end{aligned}$$