Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Herbst 2014
24.09.2014

Modulprüfung / Bachelor

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Anwendung der Laplacetransformation auf die Gleichung unter Verwendung der Regeln

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

ergibt

$$s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - 2s - 1 + \mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{\sin 2x\}(s) = \frac{2}{s^2+4}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}\,.$$

gilt. Nun wollen wir eine Partialbruchzerlegung durchführen; wir machen den Ansatz

$$\frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

und bekommen, dass

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + (4B+D)\,.$$

Die letzte Gleichung hat die Lösung $A = 2, B = \frac{5}{3}, C = 0, D = -\frac{2}{3}$ Daraus folgt,dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}$$

und

$$y(x) = 2\cos x + \frac{5}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin 2x$$

gilt.

b) **i)** Die Fourierreihe von einer periodischen Funktion ist genau dann eine reine Sinusreihe (bzw. reine Kosinusreihe), wenn die Funktion ungerade (bzw. gerade ist). Unabhängig von β hat die Funktion f reine Sinus-Fourierreihe für alle ungerade $\alpha \in \mathbb{N}$ und eine reine Kosinus-Fourierreihe für gerade $\alpha \in \mathbb{N}$.

ii) Es gilt

$$\sin^2 x \cdot \cos x = \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2ix}+e^{-2ix}}{2} \cdot \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} =$$

$$-\frac{1}{8}e^{-3ix} + \frac{1}{8}e^{-ix} + \frac{1}{8}e^{ix} - \frac{1}{8}e^{3ix}\,.$$

Daraus folgt, dass $c_{-3} = c_3 = -\frac{1}{8}$, $c_{-1} = c_1 = \frac{1}{8}$ und $c_k = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, -1, 1, 3\}$.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

a) **i)** Es gilt

$$\int_{|z|=1} \frac{5\cos z}{z}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{5(1-\frac{1}{2}z^2+...)}{z}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{5}{z}\,dz = 10\pi i\,.$$

ii) Der Integrand $F(z) := \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in 2 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$.
Da innerhalb des Integrationsweges $|z-2| = \frac{1}{2}$ nur die Polstelle 2 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z-2|=\frac{1}{2}} F(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{res}(F;2) = -2\pi i\,,$$

denn für das Residuum von F in 2 gilt

$$\mathrm{res}(F;2) = \left(\frac{d}{dz}\,(z-2)^2F(z)\right)\Bigg|_{z=2} = \left(\frac{d}{dz}\,\frac{z}{z-1}\right)\Bigg|_{z=2} = -\frac{1}{(z-1)^2}\Bigg|_{z=2} = -1\,.$$

iii) Der Integrand $F(z) = \frac{e^z}{z^5-1}$ besitzt fünf Polstellen $z_k = 1\cdot e^{i\frac{2\pi}{5}k}\quad k=0,1,2,3,4.$
Da innerhalb des Integrationsweges $|z-5| = 2$ keine von den Polstellen liegt, gilt

$$\int_{|z-5|=2} \frac{e^z}{z^5-1}\,dz\; = 0\,.$$

b) Nach dem Satz von Cauchy gilt für $|z| < 5$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=5} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=5} \frac{2\pi i(2\zeta^4-\zeta^3+2\zeta^2+1)}{\zeta-z}\,d\zeta\,.$$

Daraus folgt, dass für $|z| < 5$ $f(z) = 2\pi i(2z^4 - z^3 + 2z^2 + 1)$ gilt und dass

$$f'''(1-2i) = 2\pi i(48 - 96i - 6) = 192\pi + 84\pi i\,.$$