Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Frühjahr 2015
05.03.2015

Modulprüfung / Bachelor
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Anwendung der Laplacetransformation auf die Gleichung unter Verwendung der Regeln

$$\mathscr{L}\{y'\}(s) = s\,\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}\{y''\}(s) = s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)$$

ergibt

$$s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - s + 2\mathscr{L}\{y\}(s) = \mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+2)} + \frac{s}{s^2+2} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+2} + \frac{s}{s^2+2} = \frac{s}{s^2+1}\,.$$

gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems ist $y(t) = \cos t$.

b) Es seien $f_1(t) := f(t) - \frac{1}{2}$. Wir berechnen zuerst die komplexen Fourier Koeffizienten c_k^1 der Funktion f_1. Es gilt

$$c_k^1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^{-ikt}\,dt\right).$$

Für $k=0$ ergibt sich hier $c_0^1 = \frac{1}{4\pi}\pi = \frac{1}{4}$; sonst gilt

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{1}{2}e^{-ikt}\,dt\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^{-ikt}}{-ik}\Bigg|_{t=0}^{\pi}\right) = \frac{-1}{4\pi k}[(-1)^k - 1]$$

Daraus folgt, dass $c_0 = c_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$, $c_k = c_k^1 = 0$ für k gerade, $k \neq 0$ und $c_k = c_k^1 = \frac{1}{2ik\pi}$ für ungerade k.

Aufgabe 2 (6+4 Punkte)

a) **i)** Die Funktion $\frac{\tan z}{z}$ ist in $|z| \leqslant 1$ holomorph. Sie besitzt keine Polstelle in 0, weil $\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{z} = 1$ gilt. Nach den Residuensatz gilt

$$\int_{|z|=1}\frac{6\tan z}{z}\,dz = 0\,.$$

ii) Der Integrand $F(z) := \frac{z^3}{(z-3)^2(z+2)^3}$ besitzt in 3 eine doppelte und in -2 eine dreifache Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-2, 3\}$.
Da innerhalb des Integrationsweges $|z-3| = \frac{1}{2}$ nur die Polstelle 3 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z-3|=\frac{1}{2}} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;3) = \frac{108}{625}\pi i\,,$$

denn für das Residuum von F in 3 gilt

$$\operatorname{res}(F;2) = \left(\frac{d}{dz}(z-3)^2 F(z)\right)\Big|_{z=3} = \left(\frac{d}{dz}\frac{z^3}{(z+2)^3}\right)\Big|_{z=3} = 6\frac{z^2}{(z+2)^4}\Big|_{z=3} = \frac{54}{625}\,.$$

iii) Sei $F(z) := e^{\frac{2z}{1-z}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=5} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1)\,.$$

Um das Residuum $\operatorname{res}(F;1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von F um 1

$$F(z) = \exp\left(\frac{2z}{1-z}\right) = \exp\left(-2 + \frac{2}{1-z}\right) = e^{-2}e^{-2/(z-1)} = e^{-2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^k}{k!}(z-1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ lautet $-2e^{-2}$. Also ist $\operatorname{res}(F;1) = -2e^{-2}$ und damit

$$\int_{|z|=5} \exp\left(\frac{2z}{1-z}\right) dz = -\frac{4\pi i}{e^2}\,.$$

b) Für die gegebene Parametrisierung gilt $\gamma'(t) = 2ie^{2it}$, und es ist

$$F(\gamma(t)) = \left[\,\overline{e^{2it}}\,\right]^2 e^{2it} = e^{-4it}e^{2it} = e^{-2it}\,.$$

Nach Definition des (komplexen) Kurvenintegrals ergibt sich damit

$$\int_\gamma F(z)\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2it}(2ie^{2it})\,dt = 2i\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi i\,.$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x - (x-iy)y = (x^2 - xy) + i(yx + y^2) =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$u_x(x,y) = 2x - y\,, \qquad u_y(x,y) = -x\,, \qquad v_x(x,y) = y\,, \qquad v_y(x,y) = x + 2y.$$

Wegen

$$\begin{aligned} u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x - y = x + 2y \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3y\,,\\ u_y(x,y) = -v_x(x,y) \quad &\Longleftrightarrow \quad -x = -y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0 \end{aligned}$$

sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgendwo holomorph.