Karlsruhe Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

Sommersemester 2014
05.07.20014

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Für das charakteristische Polynom von $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 2(6 - 2\lambda - 8) + 4(4 + 4\lambda) =$$
$$-(\lambda+1)^2(\lambda-8).$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $-1, -1,\ 8$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 8I_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + \frac{2}{5} Z_1]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{36}{5} & \frac{18}{5} \\ 0 & 18 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{5}{36} Z_2]{Z_3 \to Z_3 + \frac{5}{2} Z_2} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -\frac{1}{5}(Z_1 - 2Z_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(8) = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \}.$$

Nun zur Berechnung der Eigenvektoren zu dem Eigenwert -1.

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - \frac{1}{2} Z_1, Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_1 \to \frac{1}{4} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir bekommen mit Hilfe des (-1) Ergänzungstricks, dass

$$E_A(-1) = \operatorname{lin}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \}.$$

gilt. Die Vektoren $y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $y_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind die Eigenvektoren von A.

b) Die Vektoren y_1 und y_2 sind nicht orthogonal. Wir verwenden das Gramm-Schmidt-Verfahren um eine Orthonormalbasis aus den Vektoren y_1, y_2, und y_3 zu bilden und bekommen die Basis $v_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 := \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$ und $v_3 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Daraus folgt, dass

$S = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$, $S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$,

$S^{-1}AS = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}$ gilt.

c) Die Gleichung $Ax = x$ hat nur die einzige Lösung $x = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, weil $+1$ kein Eigenwert von A ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) Es gilt $\nabla f(x,y) = ((-2+2x(5-2x+y))e^{x^2-y}, (-4+2x-y)e^{x^2-y}) \overset{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (1,-2)$ ist. Somit ist $(1,-2)$ der einzige kritische Punkt von f. Wegen $\det H_f(1,-2) = \det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot e^6 = -2e^6 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(1,-2)$ indefinit, so dass f in $(1,-2)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Definitionsgemäß ist

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma(t))\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}(1-t)^2+t^2\\ 2t(1-t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}dt$$
$$= \int_0^1 (-1-4t^2+4t)\,dt = -\frac{1}{3}\,.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

a) Die Menge $G := \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z>0\,\}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf G stetig!) Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix}\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-b\\ -7-c\\ 3-a\end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 3$, $b = 2$ und $c = -7$ gilt.

In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix}x+3y-7z\\ 3x+y+2z\\ -7x+2y+4z\end{pmatrix}$$

ein Potential $g\colon G\to\mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x g(x,y,z) = x+3y-7z$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + 3xy - 7xz + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = 3x + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= 3x+y+2z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = y + 2z$, also $c(y,z) = \frac{1}{2}y^2 + 2yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion d. Somit:

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + 3xy - 7xz + \tfrac{1}{2}y^2 + 2yz + d(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = -7x + 2y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + 3xy - 7xz + \tfrac{1}{2}y^2 + 2yz + 2z^2\,.$$

b) Wegen der Symmetrie des Gebietes K gilt $\displaystyle\iint_K x^5 \, d(x,y) = 0$ und

$$\iint_K y^2 \, d(x,y) = \iint_K x^2 \, d(x,y) = \frac{1}{2} \iint_K (x^2+y^2)\, d(x,y) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\varphi \, dr =$$

$\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} = \pi$. Die Antwort lautet also $\displaystyle\iint_K (x^5+y^2)\, d(x,y) = \pi$.