Komplexe Analysis und Integraltransformationen
Sommersemester 2014

Peer Christian Kunstmann
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Kaiserstr. 89, 76133 Karlsruhe
e-mail: peer.kunstmann@kit.edu

Innerhalb der Veranstaltung *Höhere Mathematik II für die Fachrichtung elektrotechnik und Informationstechnik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen* wird der Teil zu *Komplexe Analysis und Integraltransformationen* jeweils in der Vorlesung am Montag behandelt. Dies ist eine Vorlesungszusammenfassung, gedacht zur Vorlesungsbegleitung und als Gedächtnisstütze, nicht jedoch als etwas, das für sich selbst stehen könnte (wie etwa ein Lehrbuch). Der Besuch der Vorlesung ist durch die Lektüre in keinem Fall zu ersetzen, es gibt dort noch viel mehr an mündlichen Erklärungen, Erläuterungen und veranschaulichenden Skizzen, die für Verständnis und Einordnung des präsentierten Stoffes unabdingbar sind.

1 Fourierreihen

Ziel dieses Abschnitts ist es, periodische Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, der Periodenlänge $T > 0$ (man denke etwa an ein periodisches Audiosignal) als Überlagerung von T-periodischen "reinen" Schwingungen $t \mapsto e^{i\omega t}$ darzustellen. Die "Frequenzen" ω sind dann von der Form $\omega = \frac{2\pi k}{T}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Für $k = 0$ hat man einen konstanten Anteil, die anderen Frequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz $\frac{2\pi}{T}$ (Tonhöhe). Die Anteile der Oberschwingungen bestimmen die Klangfarbe.

Die Idee geht zurück auf Fourier (1822): "Jede 2π-periodische Funktion f lässt sich darstellen als Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$."

Es hat einige Zeit gedauert, diese Idee zu präzisieren (Funktionsbegriff, geeigneter Integralbegriff, verschiedene Konvergenzbegriffe etc). Wir kümmern uns hier um die Fragen, wie man die c_k aus f erhält und für welche f man eine punktweise Konvergenz der Fourierreihe hat.

1.1. T-periodische Funktionen: Sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *T-periodisch*, falls $f(t + T) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Es gilt dann auch $f(t + kT) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: (a) Eine T-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eindeutig bestimmt, wenn man ihre Werte auf einem Intervall $[a, a + T)$ kennt (hierbei ist $a \in \mathbb{R}$ beliebig). Jede Funktion $\tilde{f} : [a, a+T) \to \mathbb{C}$ lässt sich eindeutig zu einer T-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f = \tilde{f}$ auf $[a, a + T)$ fortsetzen.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine T-periodische Funktion, so ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definiert durch $g(t) := f(\frac{T}{2\pi} t)$, eine 2π-periodische Funktion. Es ist dann nämlich für $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t + 2\pi) = f\Big(\frac{T}{2\pi}(t + 2\pi)\Big) = f\Big(\frac{T}{2\pi}t + T\Big) = f\Big(\frac{T}{2\pi}t\Big) = g(t).$$

Wir werden uns deshalb i.w. auf 2π-periodische Funktionen beschränken.

Beispiele: sin, cos und $t \mapsto e^{it}$ sind 2π-periodische Funktionen. Die Funktion $t \mapsto \cos(2t)$ ist 2π-periodisch, aber auch π-periodisch.

1.2. Integration und Differentiation komplexwertiger Funktionen: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Für jedes $t \in [a, b]$ ist $f(t)$ eine komplexe Zahl mit Real- und Imaginärteil. Durch $u(t) := \mathrm{Re}\,(f(t))$ und $v(t) := \mathrm{Im}\,(f(t))$ werden Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert mit $f(t) = u(t) + iv(t)$ für alle $t \in [a, b]$ (Bezeichnungen $u =: \mathrm{Re}\, f$, $v =: \mathrm{Im}\, f$).

Die Funktion f heißt *(Riemann-)integrierbar*, falls u **und** v integrierbar sind. In diesem Falle setzen wir

$$\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt.$$

Das Integral ist $\mathbb{C}$-linear, dh: Ist $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine weitere integrierbare Funktion und sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist $\alpha f + \beta g$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dt = \alpha \int_a^b f\, dt + \beta \int_a^b g\, dt.$$

Uneigentliche Integrale erklärt man entsprechend.

Analog heißt f *differenzierbar* in $t_0 \in [a, b]$, falls u **und** v differenzierbar in t_0 sind, und in diesem Falle ist $f'(t_0) := u'(t_0) + iv'(t_0)$ die *Ableitung von f in t_0*.

Auch die Ableitung ist $\mathbb{C}$-linear. Es gelten die Produkt-, Quotienten- und die Kettenregel, wobei in der Kettenregel für $f \circ g$ die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ komplexwertig ist, aber $g : [c, d] \to [a, b]$ reellwertig.

Folgerung: Der Hauptsatz gilt für komplexwertige Funktionen. Weiter gelten die Regeln der partiellen Integration und der Substitution.

Erinnerung: Für $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ ist

$$e^w = e^{u+iv} = e^u\, e^{iv} = e^u(\cos v + i \sin v), \;\; |e^w| = |e^u|\, |e^{iv}| = e^u = e^{Re\, w}.$$

Beispiele: (1) Für $w = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $u, v \in \mathbb{R}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{wt}\, dt = \frac{e^{wb} - e^{wa}}{w}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e^{wt} &= \frac{d}{dt}(e^{ut}(\cos(vt) + i \sin(vt))) = ue^{ut}(\cos(vt) + i \sin(vt)) + e^{ut}(-v \sin(vt) + iv \cos(vt)) \\
&= (u + iv)e^{ut}(\cos(vt) + i \sin(vt)) = we^{wt}
\end{aligned}$$

folgt das aus dem Hauptsatz.

(2) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die über beschränkten Intervallen integrierbar ist, so gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \int_a^{a+2\pi} f(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt.$$

Wir werden 2π-periodische Funktionen meist auf $[-\pi, \pi)$ betrachten und über dieses Intervall integrieren.

(3) Für $l, k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\, dt = \begin{cases} 2\pi & , k = l \\ 0 & , k \neq l \end{cases} .$$

1.3. Trigonometrische Polynome: Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *trigonometrisches Polynom vom Grad* $\leq n \in \mathbb{N}$, falls es Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leq n$, gibt mit

$$f(t) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für ein solches f und $l \in \mathbb{Z}$ gilt dann nach Beispiel 1.2 (3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt}\, dt = \sum_{|k| \leq n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} e^{-ilt}\, dt = \begin{cases} 2\pi c_l & , |l| \leq n \\ 0 & , |l| > n \end{cases}.$$

Bemerkung: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = (c_k + c_{-k}) \cos(kt) + i(c_k - c_{-k}) \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man kann also statt mit e^{ikt} für $|k| \leq n$ auch mit $\sin(kt), \cos(kt)$ für $1 \leq k \leq n$ bzw. $0 \leq k \leq n$ arbeiten.

1.4. Fourierkoeffizienten einer Funktion: Sei $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{C}$ integrierbar. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ heißt

$$\hat{f}(k) := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

der *k-te Fourierkoeffizient*, und $(\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ heißt *Folge der Fourierkoeffizienten von f*.

Bemerkung: Man verwendet außerdem gelegentlich für $k \in \mathbb{N}_0$ bzw. $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_k(f) &:= c_k(f) + c_{-k}(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \\ b_k(f) &:= i(c_k(f) - c_{-k}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt. \end{aligned}$$

Ist f reellwertig, so sind $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}_0}$, $(b_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ reelle Folgen.
Man hat (vergleiche Bemerkung in 1.3)

$$\sum_{|k| \leq n} c_k(f) e^{ikt} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k(f) \sin(kt),$$

und es gilt $c_0(f) = a_0(f)/2$, sowie für $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k(f) = \frac{a_k(f) - i b_k(f)}{2}, \quad c_{-k}(f) = \frac{a_k(f) + i b_k(f)}{2}.$$

Beispiele: (1) Wir betrachten die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die durch $f(t) := t$ für $t \in [-\pi, \pi)$ definiert ist. Es gilt $\hat{f}(0) = 0$. Für $k \neq 0$ ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{t}{-ik} e^{-ikt} \bigg|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt}\, dt}_{=0} = \frac{(-1)^k i}{k}.$$

(2) Sei die 2π-periodische Funktion f auf $[-\pi, \pi)$ gegeben durch $f(t) = t^2$. Für $k = 0$ ist

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{3} t^3 \bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Für $k \neq 0$ ist

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-ikt}\, dt = \underbrace{\frac{t^2}{2\pi} \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{2\pi i k} \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\, dt = \frac{2}{ik} \frac{(-1)^k i}{k} = \frac{2(-1)^k}{k^2}.$$

Ende Mo 14.04.14

1.5. Stückweise stetige und stückweise glatte Funktionen: Eine 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt

(a) *stückweise stetig*, falls es

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte

$$f(t_j+) = \lim_{t \to t_j+} f(t) \quad \text{und} \quad f(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f(t)$$

existieren in $\mathbb{C}$.

(b) *stückweise glatt*, falls es

$$-\pi = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \pi$$

so gibt, dass für jedes $j = 0, \ldots, n-1$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+)$, $f(t_{j+1}-)$ und

$$f'(t_j+) = \lim_{t \to t_j+} f'(t), \qquad f'(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f'(t)$$

existieren in $\mathbb{C}$.

In den Punkten t_j muss f nicht stetig sein, der Funktionswert $f(t_j)$ spielt keine Rolle.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig. Ist f stetig differenzierbar, so ist f stückweise glatt.

Ist f stückweise stetig, so existieren in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ die einseitigen Grenzwerte $f(t+)$ und $f(t-)$.

Beispiele: (1) Die Funktionen in den Beispielen 1.4(1) und (2) sind stückweise glatt.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch mit $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0, \pi) \\ -1 & , t \in [-\pi, 0) \end{cases}$ Dann ist f stückweise glatt.

1.6. Darstellungssatz für 2π-periodische Funktionen: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stückweise glatt. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} := \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Ist f stetig in t, so konvergiert die Fourierreihe gegen $f(t)$. (ohne Beweis)

Beispiele: (1) Für die 2π-periodische Funktion f mit $f(t) = t$ für $t \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 1.4(1) $\hat{f}(k) = (-1)^k i/k$ für $k \geq 1$. Weiter ist

$$\sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{0 < |k| \leq n} \frac{(-1)^k i}{k} (\cos(kt) + i \sin(kt)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt),$$

also

$$t = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt), \quad t \in (-\pi, \pi),$$

da f in diesen Punkten stetig ist.

An der Stelle $t = \pi$ ist f unstetig. Setzt man $t = \pi$ in die Reihe rechts ein, so erhält man den Wert 0. In der Tat ist $f(\pi-) = \pi$, $f(\pi+) = f(-\pi+) = -\pi$ und also $\frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = 0$.

(2) Für die 2π-periodische Funktion f mit $f(t) = t^2$ für $t \in [-\pi, \pi)$ gilt nach Beispiel 1.4(2):

$$\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}, \qquad \hat{f}(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2}, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Da f stetig und stückweise glatt ist, gilt nach Satz 1.6:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} e^{ikt}, \quad \text{für alle } t \in [-\pi, \pi].$$

Insbesondere erhält man für $t = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Bemerkung: Der Darstellungssatz legt es nahe, für stückweise stetige (und damit insbesondere für stückweise glatte Funktionen) die folgende *Normalisierung* zu betrachten:

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und stückweise stetig mit $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi$ wie in 1.5 (a), so heißt f *normalisiert*, wenn $f(t_j) = \frac{f(t_j+)+f(t_j-)}{2}$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt. Es gilt dann $f(t) = \frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ für *jedes* $t \in \mathbb{R}$.

Durch eventuelles Abändern der Funktionswerte $f(t_j)$ lässt sich jede stückweise stetige Funktion normalisieren. Die Fourierkoeffizienten ändern sich dabei nicht.

Ist also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, stückweise glatt und normalisiert, so gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} = f(t).$$

1.7. Konvergenz im quadratischen Mittel: Sei V der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller 2π-periodischen, stückweise stetigen und normalisierten Funktionen. Dann wird durch

$$(f|g) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt \quad \text{für } f, g \in V$$

ein Skalarprodukt auf V definiert ($\to$ HM2, 15.1): Die Eigenschaften (S1) und (S2) sind klar. Zum Beweis von (S3) sei $f \in V$ mit $(f|f) = 0$, dh mit $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = 0$. Da f stückweise stetig ist mit entsprechenden Zwischenpunkten $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi$, können wir wie für stetige Funktionen ($\to$ HM2, Beispiel 15.1 (3)) einsehen, dass $f = 0$ auf jedem Intervall (t_j, t_{j+1}) gilt. Da f normalisiert ist, folgt $f = 0$ auf $[-\pi, \pi)$, also $f = 0$ auf $\mathbb{R}$ wegen der 2π-Perodizität.

Die zugehörige Norm ist gegeben durch

$$\|f\| = \sqrt{(f|f)} = \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt\Big)^{1/2}, \quad f \in V.$$

Für jedes $f \in V$ gilt die *Parsevalsche Gleichung*:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|f\|^2.$$

Insbesondere ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ein *vollständiges Orthonormalsystem* in V, und für jedes $f \in V$ gilt

$$\Big\| f - \sum_{|k|\le n} \hat{f}(k)e_k \Big\| \to 0 \ (n \to \infty),$$

dh die Fourierreihe von f konvergiert *im quadratische Mittel* gegen f. Man beachte, dass dies für jedes $f \in V$ gilt, die *punktweise* Konvergenz in 1.6 jedoch nur für $f \in V$, die zusätzlich stückweise glatt sind.

Bemerkung: Für eine gegebene Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ in $\mathbb{C}$ mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ gibt es eine Funktion f auf $[-\pi, \pi)$ so, dass $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\le n} a_k e_k$ im quadratischen Mittel gilt. Dazu muss man den Integralbegriff erweitern ($\to$ Lebesgue-Integral). Die Funktion f ist im allgemeinen nicht stückweise stetig und auch nicht beschränkt. Es gilt dann aber wieder $a_k = \hat{f}(k)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$.

2 Laplacetransformation

Wir betrachten sogenannte "Zeitfunktionen" $t \mapsto f(t)$, wobei wir uns für $t \geq 0$ interessieren (t ist der Zeitparameter). Diese Funktionen nehmen komplexe Werte an, dh konkret

- $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ **oder**
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$ **oder**
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, aber der Verlauf von f für $t < 0$ **wird ignoriert**.

Die ersten beiden Interpretationen herrschen vor, und eine auf $[0, \infty)$ definierte Funktion f denkt man sich gegebenenfalls durch Null auf $(-\infty, 0)$ fortgesetzt.

2.1. Definition der Laplacetransformation: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf **jedem** Intervall $[0, b]$, $b > 0$, Riemann-integrierbar ist. Ist $s \in \mathbb{C}$ und existiert das uneigentliche Integral

$$\mathscr{L}f(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \tag{1}$$

so heißt $\mathscr{L}f(s)$ die *Laplacetransformierte von f an der Stelle s.*

Die Menge aller $s \in \mathbb{C}$, für die das Integral in (1) konvergiert, bezeichnen wir mit $\Lambda(f)$.

Erinnerung: Das uneigentliche Integral ist erklärt durch

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-st} f(t)\, dt,$$

wobei die Integrale über $[0, b]$ nach Voraussetzung existieren.

Bezeichnungen sind auch: $\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, $\mathscr{L}\{f\}(s)$, $\mathscr{L}[f](s)$.

2.2. Beispiele: Wir erinnern zunächst daran, dass für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a < b$ gilt

$$\int_a^b e^{zt}\, dt = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z}. \tag{2}$$

Weiter gilt für $b \to \infty$: $|e^{-sb}| = e^{-b\, Re\, s} \to 0$, wenn $Re\, s > 0$ (abklingende Schwingung), und $\to \infty$, wenn $Re\, s < 0$. Für $s \neq 0$ mit $Re\, s = 0$ existiert der Limes $e^{ib\, Im\, s}$ für $b \to \infty$ nicht (periodische Schwingung).

(a) *Einheitssprung* $\sigma(t) = \begin{cases} 1 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$ (Bezeichnungen auch $U(t)$, $1(t)$) oder *Heavisidefunktion* (als solche manchmal $H(t)$ oder $I(t)$ geschrieben). Für $s \in \mathbb{C}$ und $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-st} \sigma(t)\, dt = \int_0^b e^{-st}\, dt = \begin{cases} b & , s = 0 \\ \frac{1 - e^{-sb}}{s} & , s \neq 0 \end{cases}.$$

Wir erhalten $\mathscr{L}\sigma(s) = \frac{1}{s}$ für $Re\, s > 0$, sonst keine Konvergenz des Laplaceintegrals.
(b) $f(t) = e^{at}$, wobei $a \in \mathbb{C}$. Ein Vergleich mit (a) ergibt:

$$\mathscr{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{1}{s-a},$$

für $Re\, s > Re\, a$, sonst keine Konvergenz des Integrals in (1).
(c) Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & , t \in [0,1] \\ 0 & , t > 0 \end{cases}$. Für $s \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-st}\, dt = \begin{cases} 1 & , s = 0 \\ \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) & , s \neq 0 \end{cases}.$$

Hier ist also $\Lambda(f) = \mathbb{C}$. Beachte, dass gilt

$$\lim_{s \to 0} \mathscr{L}\{f\}(s) = \lim_{s \to 0} \frac{1 - e^{-s}}{s} = 1 = \mathscr{L}\{f\}(0)$$

(man verwende z.B. $e^{-s} = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-s)^k}{k!}$ oder die Abschätzung aus HM I 7.11(11): $|\frac{1-e^{-s}}{s} - 1| \leq |s| e^{|s|}$).

Wie auch bei den Fourierreihen betrachten wir i.w. nur Funktionen, die sinnvollerweise als Signale vorkommen werden. Dabei kennen wir stückweise stetige Funktionen schon im 2π-periodischen Fall und passen die Definition nur an. Dies ist eine Regularitätseigenschaft. Zur Konvergenz des Integrals benötigt man außerdem geeignete Wachstumseigenschaften, von denen wir hier eine einfache verwenden.

Ende Mo 28.04.14

2.3. Definition: Eine Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ heißt
(a) *stückweise stetig*, falls es eine Folge

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \to \infty \ (n \to \infty)$$

so gibt, dass für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $f : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+) = \lim_{t \to t_j+} f(t)$ und $f(t_{j+1}-) = \lim_{t \to t_{j+1}-} f(t)$ existieren.

(b) *von exponentieller Ordnung* $\gamma \in \mathbb{R}$, falls es $M > 0$ gibt mit

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \text{für alle } t \geq 0,$$

und *exponentiell beschränkt*, falls f von exponentieller Ordnung γ für ein geeignetes $\gamma \in \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Ist f stetig, so ist f stückweise stetig.

Ist f stückweise stetig und (t_j) eine Folge wie in der Definition, so kann man die Funktion $f : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{C}$ in Integralen $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cdots \, dt$ so behandeln, als ob sie auf $[t_j, t_{j+1}]$ stetig wäre.

2.4. Existenz der Laplacetransformation: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Dann gilt $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\} \subset \Lambda(f)$ und

$$|\mathscr{L}\{f\}(s)| \leq \frac{M}{Re\, s - \gamma} \quad \text{für } Re\, s > \gamma.$$

Beweis. Die Voraussetzungen von Definition 2.1 sind erfüllt. Für $b > 0$ und $Re\, s > \gamma$ gilt

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)| \, dt \leq \int_0^b e^{-(Re\, s)t} \, Me^{\gamma t} \, dt = M \int_0^b e^{-(Re\, s - \gamma)t} \, dt \longrightarrow \frac{M}{Re\, s - \gamma} \; (b \to \infty).$$

Also konvergiert das Integral in (1) absolut und die Behauptung folgt. □

Dabei heißt für eine Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ das Integral $\int_0^\infty g(t) \, dt$ *absolut konvergent*, falls das Integral $\int_0^\infty |g(t)| \, dt$ konvergiert. Absolute Konvergenz impliziert Konvergenz des Integrals und die Abschätzung

$$\Big| \int_0^\infty g(t) \, dt \Big| \leq \int_0^\infty |g(t)| \, dt.$$

Bemerkung: Die Funktion $f(t) = Me^{\gamma t}$ zeigt, dass die Aussagen in Satz 2.4 "optimal" sind: nach Beispiel 2.2 gilt $\Lambda(f) = \{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\}$ und

$$|\mathscr{L}\{f\}(s)| = \Big| \frac{M}{s - \gamma} \Big| = \frac{M}{Re\, s - \gamma}$$

für reelle $s > \gamma$.

2.5. Rechenregeln: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ_f bzw. γ_g.

(a) (**Linearität**) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ist $\alpha f + \beta g$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\max\{\gamma_f, \gamma_g\}$) und es gilt

$$\mathscr{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathscr{L}\{f\}(s) + \beta \mathscr{L}\{g\}(s), \quad \text{für } Re\, s > \max\{\gamma_f, \gamma_g\}.$$

(b) (**Dämpfungsregel**) Ist $a \in \mathbb{C}$, so ist $t \mapsto e^{at} f(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma_f + Re\, a$ und für $Re\, s > \gamma_f + Re\, a$ gilt

$$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}(s - a).$$

(c) **(Verschiebungsregel)** Ist $a > 0$, so setzen wir

$$\tau_a f : [0, \infty) \to \mathbb{C}, \tau_a f(t) := \begin{cases} f(t-a) & , t \geq a \\ 0 & , t \in [0, a). \end{cases}$$

(Wir schreiben manchmal auch $\sigma(t-a)f(t-a)$ statt $\tau_a f$ und denken uns die Funktion f durch Null "nach links" fortgesetzt.) Dann ist $\tau_a f$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ_f und

$$\mathscr{L}\{\tau_a f\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{f\}(s) \quad \text{für } Re\, s > \gamma_f.$$

Beweis. (a) klar.

(b) Für $b > 0$ gilt

$$\int_0^b e^{-st}e^{at}f(t)\,dt = \int_0^b e^{-(s-a)t}f(t)\,dt,$$

dann $b \to \infty$.

(c) Für $b > a$ liefert die Substitution $t = \tau + a$

$$\int_0^b e^{-st}\tau_a f(t)\,dt = \int_a^b e^{-st}f(t-a)\,dt = \int_0^{b-a} e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau = e^{-as}\int_0^{b-a} e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau,$$

nun $b \to \infty$. □

2.6. Beispiele: (a) $\sin t$ ist beschränkt auf $[0, \infty)$, dh von exponentieller Ordnung 0. Es gilt $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$. Also nach 2.2 (b)

$$\mathscr{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{2i}(\mathscr{L}\{e^{it}\}(s) - \mathscr{L}\{e^{-it}\}(s)) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s+i}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

für $Re\, s > 0$.

(b) Auch $\cos t$ ist von exponentieller Ordnung 0. Für $Re\, s > 0$ und $b > 0$ gilt (partielle Integration!)

$$\int_0^b e^{-st}\cos t\,dt = e^{-st}\sin t\Big|_{t=0}^{t=b} + s\int_0^b e^{-st}\sin t\,dt = e^{-sb}\sin b + s\int_0^b e^{-st}\sin t\,dt.$$

Wegen $e^{-sb}\sin b \to 0$ für $b \to \infty$ folgt

$$\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1} \quad \text{für } Re\, s > 0.$$

(c) Seien $P(s)$, $Q(s)$ komplexe Polynome in s mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s) = n$ und

$$Q(s) = (s-\lambda_1)\cdot(s-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(s-\lambda_n),$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *verschieden* sind. Dann gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\alpha_1}{s-\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s-\lambda_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}.$$

Beweis. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \to V$ die $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ auf die rechte Seite abbildet, ist linear und injektiv, aus Dimensionsgründen also surjektiv auf

$$V := \left\{ \frac{P(s)}{Q(s)} : \mathrm{Grad}\, P(s) < n \right\}.$$

□

Man kann die Koeffizienten berechnen:

$$\alpha_k = \lim_{s \to \lambda_k} (s - \lambda_k) \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\lambda_k)}{\prod_{j \neq k} (\lambda_k - \lambda_j)}$$

für $k = 1, \dots, n$.

Nach 2.2 (b) ist also

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathscr{L}\{\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t}\}(s)$$

für $Re\, s > \max(Re\, \lambda_1, Re\, \lambda_2, \dots, Re\, \lambda_n)$.

(d) $\frac{s+b}{s^2+ps+q}$ mit $b, p, q \in \mathbb{R}$, wobei $s^2 + ps + q$ keine reellen Nullstellen habe. Dann ist $s^2 + ps + q = (s-a)^2 + \omega^2$ mit $a = -p/2$ und $\omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0$. Im Fall $\omega = 1$ erhalten wir für $Re\, s > a$

$$\begin{aligned} \frac{s+b}{(s-a)^2+1} &= \frac{s-a}{(s-a)^2+1} + \frac{a+b}{(s-a)^2+1} \\ &= \mathscr{L}\{\cos t\}(s-a) + (a+b)\mathscr{L}\{\sin t\}(s-a) \\ &= \mathscr{L}\{e^{at}\cos t + (a+b)e^{at}\sin t\}(s) \end{aligned}$$

nach (a), (b) und der Verschiebungsregel.

2.7. Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung: Sei $a \in \mathbb{C}$ und $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig, sowie $y_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die eindeutige Lösung (dh $y : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar) des Anfangswertproblems

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'(t) &=& ay(t) + f(t), \quad t \geq 0 \\ y(0) &=& y_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

gegeben durch

$$y(t) = e^{at}y_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Es gilt nämlich $y(0) = y_0$ und (nach Produktregel und Hauptsatz)

$$\frac{d}{dt}y(t) = \frac{d}{dt}\Big(e^{at}\big(y_0 + \int_0^t e^{-a\tau} f(\tau)\, d\tau\big)\Big) = ay(t) + e^{at}e^{-at}f(t),$$

so dass y Lösung des Problems ist. Ist $z : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine weitere Lösung, so genügt $w := y - z$ den Bedingungen $w(0) = 0$ und $w'(t) = aw(t)$ für $t \geq 0$. Wenn man nun $v(t) := e^{-at}w(t)$ betrachtet, hat man $v(0) = 0$, $v'(t) = 0$ für $t \geq 0$, woraus der Reihe nach $v = 0$, $w = 0$ und $y = z$ folgt. Also ist y die einzige Lösung des Problems. Ende Mo 05.05.14

Bemerkung: Ist f nur stückweise stetig und $(t_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge wie in Definition 2.3, so ist die in (4) definierte Funktion y stetig auf $[0, \infty)$ und stetig differenzierbar in $[0, \infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ mit

$$\begin{aligned} y'(t) &= ay(t) + f(t), \quad t \in [0, \infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}, \\ y'(t_j\pm) &= ay(t_j) + f(t_j\pm), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Wir betrachten auch in diesem Fall y als Lösung des Problems (4).

2.8. Die Faltung: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und exponentiell beschränkt. Für jedes $t \geq 0$ ist

$$\tau \mapsto \begin{cases} f(\tau)g(t - \tau) & , \tau \in [0, t] \\ 0 & , \tau > t \end{cases}$$

stückweise stetig und über $[0, t]$ Riemann-integrierbar. Die Funktion

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{C}, h(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau$$

ist stetig und exponentiell beschränkt und heißt *Faltung* von f und g, geschrieben $h = f * g$.

Bemerkung: (a) Es gilt $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau = (g * f)(t)$.

(b) Es gilt

$$(\alpha f_1 + f_2) * g = \alpha(f_1 * g) + f_2 * g, \quad f * (\beta g_1 + g_2) = \beta(f * g_1) + f * g_2$$

und $(f * g_1) * g_2 = f * (g_1 * g_2)$.

(c) Setzen wir in der Situation von 2.7: $g(t) := e^{at}$, so schreibt sich (4) als

$$y(t) = e^{at}y_0 + (g * f)(t), \quad t \geq 0. \tag{5}$$

(d) Es gilt $(\sigma * f)(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, dh $\sigma * f$ ist (für stetiges f) diejenige Stammfunktion von f, die in 0 verschwindet.

Beweis. Nur exponentielle Beschränktheit: Es gelte $|f(t)|, |g(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Dann ist

$$|h(t)| \leq \int_0^t Me^{\gamma\tau} Me^{\gamma(t-\tau)}\, d\tau = M^2 te^{\gamma t} \leq M^2 M_\varepsilon e^{(\gamma+\varepsilon)t}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. $\square$

2.9. Die Faltungsregel: Seien $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = \mathscr{L}\{f\}(s)\mathscr{L}\{g\}(s), \quad \text{für } Re\, s > \gamma.$$

Anwendung: In der Situation von 2.7 wenden wir die Laplacetransformation an auf (5) und erhalten (wenn f exponentiell beschränkt und $Re\, s$ hinreichend groß ist):

$$\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = \mathscr{L}\{e^{at}y_0\}(s) + \mathscr{L}\{e^{at}\}(s)\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s-a}\, y_0 + \frac{1}{s-a}\, \mathscr{L}\{f(t)\}(s).$$

Damit ergibt sich als "Lösungsmethode" für (3):

(i) Bestimme zu $f(t)$ die Laplacetransformation $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) =: F(s)$.

(ii) Setze $Y(s) := \frac{y_0}{s-a} + \frac{F(s)}{s-a}$.

(iii) Bestimme $y(t)$ so, dass $\mathscr{L}\{y(t)\}(s) = Y(s)$.

Dann erwarten wir, dass y Lösung von (3) ist.

Problem: Ist die Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (bzw. $\to \mathbb{C}$) in (iii) eindeutig bestimmt?

[I.a. nicht: Für $\tilde{y}(t) := \begin{cases} y(t) & , t \neq 1 \\ c & , t = 1 \end{cases}$ und $c \neq y(1)$ gilt $\mathscr{L}\{\tilde{y}\} = \mathscr{L}\{y\}$.
Aber: Sind y_1, y_2 *stetig* und $\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{\tilde{y}\}$, so folgt $y_1 = y_2$.]

Beweis. Nur im Falle $|f(t)| \leq 1$, $|g(t)| \leq 1$, $t \geq 0$. Für $b > 0$ und $Re\, s > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^b e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau\, dt = \int_0^b \int_0^t e^{-s\tau} f(\tau) e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\ = & \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_\tau^b e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\, dt\, d\tau = \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_0^{b-\tau} e^{-sr} g(r)\, dr\, d\tau \\ = & \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \int_0^b e^{-sr} g(r)\, dr - \int_0^b e^{-s\tau} f(\tau) \int_{b-\tau}^b e^{-sr} g(r)\, dr\, d\tau. \end{aligned}$$

Für $b \to \infty$ konvergiert der erste Term gegen $\mathscr{L}\{f\}(s)\mathscr{L}\{g\}(s)$, den zweiten bezeichnen wir mit $R(b)$.

Wir schreiben $\xi = Re\, s$. Dann ist $\xi > 0$ und (nach den Voraussetzungen an f, g):

$$\begin{aligned}
|R(b)| &\leq \int_0^b e^{-\xi\tau}|f(\tau)| \int_{b-\tau}^b e^{-\xi r}|g(r)|\,dr\,d\tau \\
&\leq \int_0^b e^{-\xi\tau} \int_{b-\tau}^b e^{-\xi r}\,dr\,d\tau \\
&\leq \int_0^b e^{-\xi\tau}\tau e^{-\xi(b-\tau)}\,d\tau \\
&= \frac{b^2}{2}\, e^{-\xi b} \longrightarrow 0 \quad (b \to \infty).
\end{aligned}$$

□

2.10. Beispiele: Für $t \geq 0$ gilt

$$\sigma * \sigma(t) = \int_0^t \sigma(\tau)\sigma(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t d\tau = t.$$

Also ist nach Faltungs- und Dämpfungsregel (hier ist $a \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t\}(s) &= \mathscr{L}\{\sigma\}(s)\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = \frac{1}{s^2}, \quad Re\, s > 0, \\
\mathscr{L}\{te^{at}\}(s) &= \mathscr{L}\{t\}(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad Re\, s > Re\, a.
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$(\sigma * \sigma) * \sigma(t) = \int_0^t \tau\sigma(t-\tau)\,d\tau = \frac{t^2}{2}, \quad t \geq 0.$$

Also (wieder mit $a \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\frac{t^2}{2}\}(s) &= \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^3}, \quad Re\, s > 0, \\
\mathscr{L}\{t^2 e^{at}\}(s) &= \frac{2}{(s-a)^3}, \quad Re\, s > Re\, a.
\end{aligned}$$

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt (Beweis durch Induktion!):

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sigma * \sigma * \ldots * \sigma}_{n+1}(t) &= \frac{t^n}{n!}, \quad t \geq 0. \\
\mathscr{L}\{\frac{t^n}{n!}\}(s) &= \frac{1}{s^{n+1}}, \quad Re\, s > 0, \\
\mathscr{L}\{t^n e^{at}\}(s) &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad Re\, s > Re\, a.
\end{aligned}$$

2.11. Komplexe Partialbruchzerlegung: Seien $P(s)$, $Q(s)$ komplexe Polynome mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s) = n$. Dann existieren *verschiedene* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ und $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$ und

$$Q(s) = \mu(s-\lambda_1)^{k_1} \cdot (s-\lambda_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (s-\lambda_m)^{k_m},$$

wobei $\mu \in \mathbb{C}$. Die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sind dabei die *verschiedenen* komplexen Nullstellen von $Q(s)$ und $k_1, k_2, \ldots, k_m$ deren jeweilige Vielfachheiten.

Es gibt dann komplexe Koeffizienten $\alpha_l^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, m,\ l = 1, \ldots, k_j)$ so, dass

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{\alpha_1^{(1)}}{s-\lambda_1} + \frac{\alpha_2^{(1)}}{(s-\lambda_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_1}^{(1)}}{(s-\lambda_1)^{k_1}} + \\ &\quad + \frac{\alpha_1^{(2)}}{s-\lambda_2} + \frac{\alpha_2^{(2)}}{(s-\lambda_2)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_2}^{(2)}}{(s-\lambda_2)^{k_2}} + \\ &\quad + \ldots + \\ &\quad + \frac{\alpha_1^{(m)}}{s-\lambda_m} + \frac{\alpha_2^{(m)}}{(s-\lambda_m)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{k_m}^{(m)}}{(s-\lambda_m)^{k_m}}. \end{aligned}$$

M.a.W. $\frac{P(s)}{Q(s)}$ ist eine Linearkombination der Funktionen $\frac{1}{(s-\lambda_j)^l}$ $(j = 1, \ldots, m, l = 1, \ldots, k_j)$. Für die Koeffizienten höchster Ordnung hat man etwa

$$\alpha_{k_j}^{(j)} = \lim_{s \to \lambda_j} (s-\lambda_j)^{k_j} \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Wir erhalten aus 2.10:

$$\begin{aligned} \frac{P(s)}{Q(s)} &= \mathscr{L}\Big\{\alpha_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \alpha_2^{(1)} t e^{\lambda_1 t} + \ldots + \alpha_{k_1}^{(1)} \frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!} e^{\lambda_1 t} + \\ &\quad + \alpha_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \alpha_2^{(2)} t e^{\lambda_2 t} + \ldots + \alpha_{k_2}^{(2)} \frac{t^{k_2-1}}{(k_2-1)!} e^{\lambda_2 t} + \\ &\quad + \ldots + \\ &\quad + \alpha_1^{(m)} e^{\lambda_m t} + \alpha_2^{(m)} t e^{\lambda_m t} + \ldots + \alpha_{k_m}^{(m)} \frac{t^{k_m-1}}{(k_m-1)!} e^{\lambda_m t}\Big\}(s) \end{aligned}$$

für $Re\, s > \max\{Re\, \lambda_1, Re\, \lambda_2, \ldots, Re\, \lambda_m\}$.

Beispiel:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{s+i},$$

hier sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Wir lesen ab

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \mathscr{L}\{\sigma(t) - \frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it}\}(s) = \mathscr{L}\{\sigma(t) - \cos t\}(s).$$

2.12. Differentiation für stetige stückweise differenzierbare Funktionen: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *stetig* und von exponentieller Ordnung γ und sei $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \to \infty$ eine Folge derart, dass f in $[0,\infty) \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ differenzierbar ist und f' stückweise stetig ist im folgenden Sinne:

Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt:

(i) $f' : (t_j, t_{j+1}) \to \mathbb{C}$ ist stetig,

(ii) die einseitigen Grenzwerte $f'(t_j+) = \lim\limits_{t\to t_j+} f'(t)$ und $f'(t_{j+1}-) = \lim\limits_{t\to t_{j+1}-} f'(t)$ existieren.

In den Punkten t_j selber ist f' nicht unbedingt definiert, in diesem Fall setzen wir $f'(t) := (f'(t_j+) + f'(t_j-))/2$. Der Funktionswert spielt aber für die Integration keine Rolle.

Dann gilt

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0), \quad \text{für } Re\, s > \gamma.$$

Ende Mo 12.05.14

Bemerkung: Unter den gegebenen Voraussetzungen kann man die Funktion $f : [t_j, t_{j+1}] \to \mathbb{C}$ in Integralen $\int_{t_j}^{t_{j+1}} \cdots\, dt$ so behandeln, als ob sie auf $[t_j, t_{j+1}]$ stetig differenzierbar wäre.

Beweis. Für $b > 0$ und $Re\, s > \gamma$ gilt mittels partieller Integration

$$\int_0^b e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{b} + s\int_0^b e^{-st} f(t)\, dt = e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-st} f(t)\, dt$$

Dabei beachte man, dass etwa für $t_1 < b < t_2$ die Funktion f betrachtet auf $[0, t_1]$ und auf $[t_1, b]$ stetig differenzierbar ist und man partielle Integration auf jedes dieser Teilintervalle anwendet, wobei am Rand die einseitigen Grenzwerte zu nehmen sind. Man hat dann

$$e^{-st} f(t)\Big|_{t=0}^{t_1-} + e^{-st} f(t)\Big|_{t=t_1+}^{b} = e^{-st_1} f(t_1-) - f(0) + e^{-sb} f(b) - e^{-st_1} f(t_1+) = e^{-sb} f(b) - f(0)$$

wegen der Stetigkeit von f in t_1.
Die Behauptung folgt mit $b \to \infty$. □

Bemerkung: Betrachtet man nicht $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$, sondern $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, so betrachtet man die Ableitung $f'(t)$ nur für $t > 0$ und hat in der Formel den rechtsseitigen Grenzwert $f(0+)$ zu nehmen:

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+).$$

Beispiel:

$$f(t) = \begin{cases} t & , t \in [0,1] \\ 2-t & , t \in (1,2] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} .$$

Hier gilt $f'(t) = 1$ für $t \in (0,1)$, $f'(t) = -1$ für $t \in (1,2)$ und $f'(t) = 0$ für $t > 2$. Setzt man $g(t) = 1$ für $t \in (0,1)$ und $g(t) = 0$ sonst, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{g\}(s) &= \frac{1-e^{-s}}{s} \\
\mathscr{L}\{f\}(s) &= \mathscr{L}\{g * g\}(s) = \Big(\frac{1-e^{-s}}{s}\Big)^2 \\
\mathscr{L}\{f'\}(s) &= \mathscr{L}\{g - \tau_1 g\}(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} - e^{-s}\,\frac{1-e^{-s}}{s} = s\Big(\frac{1-e^{-s}}{s}\Big)^2 = s\mathscr{L}\{f\}(s)
\end{aligned}$$

für $Re\, s > 0$.

2.13. Ableitungen höherer Ordnung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ $(n-1)$-mal stetig differenzierbar und derart, dass $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)} : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ die Voraussetzungen von 2.12 erfüllen. Dann gilt für $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$ (definiert im Sinne von 2.12):

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathscr{L}\{f\}(s) - f^{(n-1)}(0+) - s f^{(n-2)}(0+) - \ldots - s^{n-2} f'(0+) - s^{n-1} f(0+)$$

für $Re\, s > \max(\gamma, 0)$.

2.14. Anwendung: Wir können die Regeln aus 2.12 und 2.13 zur Lösung von Anfangswertproblemen für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten verwenden.

Vorbemerkung (reelle Partialbruchzerlegung): Sind $P(s)$, $Q(s)$ *reelle* Polynome mit $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s)$, so treten nicht-reelle Nullstellen als konjugiert komplexe Paare auf und können zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{s-a+i\omega} + \frac{\overline{\alpha}}{s-a-i\omega} &= \frac{2(Re\,\alpha)(s-a) + 2\omega Im\,\alpha}{(s-a)^2+\omega^2} \\
&= \mathscr{L}\{2(Re\,\alpha)e^{at}\cos(\omega t) + 2(Im\,\alpha)e^{at}\sin(\omega t)\}(s)
\end{aligned}$$

und

$$\frac{\beta}{(s-a+i\omega)^2} + \frac{\overline{\beta}}{(s-a-i\omega)^2} = \frac{2(Re\,\beta)(s-a)^2 + 4\omega(Im\,\beta)(s-a) - 2(Re\,\beta)\omega^2}{((s-a)^2+\omega^2)^2}.$$

Hierbei sind a, ω reell und α, β komplex. Mittels der Formeln $\sin(\omega t) = Im\, e^{i\omega t}$, $\cos(\omega t) = Re\, e^{i\omega t}$ sieht man ein, dass

$$\mathscr{L}\{t\cos(\omega t)\}(s) = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}, \quad \mathscr{L}\{t\sin(\omega t)\}(s) = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$$

für $Re\, s > 0$. Also ist

$$\frac{\beta}{(s-a+i\omega)^2} + \frac{\overline{\beta}}{(s-a-i\omega)^2} = \mathscr{L}\{2(Re\,\beta)te^{at}\cos(\omega t) + 2(Im\,\beta)te^{at}\sin(\omega t)\}(s).$$

(a) RL-Kreis: In einem Stromkreis mit Widerstand R und einer Spule der Induktivität L gilt, wenn wir die Spannung $U(t)$ anlegen, für den Strom $J(t)$:

$$J'(t) = -\frac{R}{L}J(t) + \frac{U(t)}{L}.$$

Nehmen wir speziell $U(t) = U_0 \sin(\omega t)$ und $J(0) = 0$, so erhalten wir nach Laplacetransformation:

$$s\mathscr{L}\{J\}(s) = -\frac{R}{L}\mathscr{L}\{J\}(s) + \frac{U_0}{L}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

also

$$\mathscr{L}\{J\}(s) = \frac{U_0}{L}\,\frac{\omega}{(s+\frac{R}{L})(s^2+\omega^2)},$$

und nach reeller Partialbruchzerlegung

$$\mathscr{L}\{J\}(s) = \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\,\frac{1}{s+\frac{R}{L}} - \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\,\frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{U_0 R}{R^2+\omega^2L^2}\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

was zu

$$J(t) = \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R^2+\omega^2L^2}\Big(R\sin(\omega t) - \omega L\cos(\omega t)\Big)$$

führt. Mit der Phasenverschiebung $\varphi = \arctan(\frac{\omega L}{R})$ erhalten wir

$$J(t) = \frac{U_0\omega L}{R^2+\omega^2L^2}\,e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\,\sin(\omega t-\varphi).$$

Im Grenzfall $L = 0$ haben wir $J = U/R$, also $J(t) = \frac{U_0}{R}\sin(\omega t)$ und keine Phasenverschiebung.

(b) RLC-Kreis: Wir nehmen in den Stromkreis zusätzlich einen Kondensator der Kapazität C auf. Die an ihm entstehende Spannung ist $U_c(t) = \frac{1}{C}q(t)$, wobei $q(t)$ die Ladung bezeichnet. Das führt zur Differentialgleichung

$$LJ'(t) + RJ(t) + \frac{1}{C}q(t) = U(t)$$

und nach Division durch L und Ableitung nach t zur Differentialgleichung

$$J''(t) + \frac{R}{L}\,J'(t) + \frac{1}{LC}J(t) = \frac{\omega}{L}\,U_0\cos(\omega t),$$

wenn wir dieselbe Wechselspannung wie in (a) anlegen. Wir setzen $F(s) = \mathscr{L}\{J\}(s)$ und wollen die Lösung für $J(0) = J'(0) = 0$ bestimmen. Laplacetransformation ergibt

$$s^2F(s) + \frac{R}{L}\,sF(s) + \frac{1}{LC}\,F(s) = \frac{\omega U_0}{L}\,\frac{s}{s^2+\omega^2},$$

also
$$F(s)=\frac{\omega U_0}{L}\,\frac{s}{(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC})(s^2+\omega^2)}.$$
Wir bestimmen die Nullstellen des Nenners: Neben den offensichtlichen $\pm i\omega$ sind dies die Nullstellen von $s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}$. Wir diskutieren den Fall (schwache Dämpfung), dass diese Nullstellen konjugiert komplex sind, dh also dass $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ gilt. Wir setzen $\psi := \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$, $\alpha := \frac{R}{2L}$ und erhalten
$$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}=(s+\alpha+i\psi)(s+\alpha-i\psi)=(s+\alpha)^2+\psi^2.$$
Reelle Partialbruchzerlegung führt also auf
$$\frac{s}{((s+\alpha)^2+\psi^2)(s^2+\omega^2)}=\frac{as+b}{(s+\alpha)^2+\psi^2}+\frac{cs+d}{s^2+\omega^2},$$
und wir erkennen, dass $J(t)$ eine Linearkombination von
$$e^{-\alpha t}\cos(\psi t),\quad e^{-\alpha t}\sin(\psi t),\quad \cos(\omega t),\quad \sin(\omega t)$$
ist. Im ungedämpften Fall $R=0$ ist $\alpha=0$, und für $\psi^2\neq\omega^2$ ist die Lösung eine Linearkombination von $\cos(\psi t)$, $\sin(\psi t)$, $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$. Im Resonanzfall $\alpha=0$, $\psi^2=\omega^2$ erhalten wir als Nenner $(s^2+\omega^2)^2=(s-i\omega)^2(s+i\omega)^2$ und nach der Vorbemerkung ist
$$J(t)=\frac{U_0}{2L}\,t\sin(\omega t),$$
dh eine sich aufschaukelnde Schwingung ("Resonanzkatastrophe").

(c) Im Fall einer allgemeinen linearen Differentialgleichung höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_1y'(t)+a_0y(t) &=& f(t),\quad t\geq 0,\\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}, y^{(n-2)}(0)=y_{n-2},\quad \ldots & & ,y'(0)=y_1, y(0)=y_0 \end{array}\right. ,\tag{S}$$
mit $a_n\neq 0$ setzt man $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}(s)$, verwendet die Laplacetransformation und 2.13 und erhält eine algebraische Gleichung für $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}(s)$:
$$F(s)=\sum_{k=0}^{n}a_k\Big(s^kY(s)-\sum_{j=0}^{k-1}s^{k-1-j}y_j\Big).$$
Diese kann man nach $Y(s)$ auflösen
$$Y(s)=\frac{F(s)+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}a_ks^{k-1-j}y_j}{\sum_{k=0}^{n}a_ks^k},$$
und danach $y(t)$ mit $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}(s)$ mittels (reeller oder komplexer) Partialbruchzerlegung bestimmen.

Beispiel: $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = e^{2t}$, $t \geq 0$, mit $y(0) = 1$ und $y'(0) = 2$. Mittels Laplacetransformation erhalten wir für $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$: Ende Mo 19.05.14

$$(s^2 - 4s + 4)Y(s) - 2 - s \cdot 1 - 4 \cdot (-1) = \frac{1}{s-2},$$

also

$$Y(s) = \frac{1}{(s-2)^2}\Big(\frac{1}{s-2} + s - 2\Big) = \frac{1}{(s-2)^3} + \frac{1}{s-2}$$

(hier haben wir die Partialbruchzerlegung direkt abgelesen). Folglich ist die Lösung gegeben durch

$$y(t) = \frac{t^2}{2}e^{2t} + e^{2t}, \quad t \geq 0,$$

was man zur Probe nachrechnen kann.

2.15. Sprungantwort eines Systems: Das Verhalten eines Systems sei beschrieben durch eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (S). Die *Sprungantwort* h des Systems ist die Lösung y von (S) zur äußeren Anregung $f(t) = \sigma(t)$ (Einheitssprung) mit Anfangswerten $y_{n-1} = y_{n-2} = \ldots = y_1 = y_0 = 0$.

Nach 2.14 (c) haben wir für die Laplacetransformierte der Sprungantwort

$$\mathscr{L}\{h(t)\}(s) = \frac{\mathscr{L}\{\sigma(t)\}(s)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{s(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0)}.$$

Beispiel: Das System sei beschrieben durch

$$\begin{cases} y''(t) + ay'(t) + by(t) & = & f(t), \quad t \geq 0 \\ y'(0) = y_1, & & y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Die Sprungantwort $h(t)$ ist gegeben durch

$$\mathscr{L}\{h(t)\}(s) = \frac{1}{(s^2 + as + b)s}.$$

Im Beispiel 2.14 (a) ist die Sprungantwort $h(t)$ gegeben durch

$$\mathscr{L}\{h(t)\}(s) = \frac{1}{(s + \frac{R}{L})s} = \frac{L}{R}\Big(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}}\Big),$$

dh durch

$$h(t) = \frac{L}{R}\Big(\sigma(t) - e^{-\frac{R}{L}t}\Big).$$

2.16. Anfangswertsatz: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann gilt

$$\lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{f\}(s) = f(0+).$$

(Der Limes bezieht sich auf reelle s!)

Beweis. Es gelte $\gamma \geq 0$ und $|f(t)| \leq Me^{\gamma t}$, $t \geq 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $b > 0$ mit $|f(t) - f(0+)| \leq \varepsilon$ für $t \in (0,b)$. Wegen $\int_0^\infty se^{-st}\,dt = 1$ gilt für $s > \gamma$:

$$\begin{aligned}
|s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+)| &\leq \int_0^\infty se^{-st}|f(t) - f(0+)|\,dt \\
&\leq \int_0^b se^{-st}\,\varepsilon\,dt + \int_b^\infty se^{-st}\,2Me^{\gamma t}\,dt \\
&\leq \varepsilon + \frac{s}{s-\gamma}\,2M \int_{b(s-\gamma)}^\infty e^{-r}\,dr \\
&\longrightarrow \varepsilon \quad (s \to \infty),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt $t = \frac{r}{s-\gamma}$ substituiert haben. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel (aus 2.15): Die Lösung von $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ genügt

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = \frac{(s+a)y_0 + y_1 + \mathscr{L}\{f\}(s)}{s^2 + as + b},$$

und $y : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ ist zweimal stetig differenzierbar, wenn $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig und exponentiell beschränkt ist. Wir erhalten

$$\lim_{s\to\infty} s\mathscr{L}\{y\}(s) = y_0 = y(0+).$$

2.17. Endwertsatz: Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und $f(\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t)$ existiere. Dann ist f beschränkt und es gilt

$$\lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s) = f(\infty).$$

Beweis. Es gelte $|f(t)| \leq M$, $t \geq 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $c > 0$ mit $|f(t) - f(\infty)| \leq \varepsilon$ für $t \geq c$. Dann gilt für $s > 0$:

$$\begin{aligned}
|s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(\infty)| &\leq \int_0^\infty se^{-st}|f(t) - f(\infty)|\,dt \\
&\leq \int_0^c se^{-st}\,2M\,dt + \int_c^\infty se^{-st}\,\varepsilon\,dt \\
&\leq \varepsilon + 2M \int_0^{cs} e^{-r}\,dr \\
&\leq \varepsilon + 2Mcs \\
&\longrightarrow \varepsilon \quad (s \to 0+),
\end{aligned}$$

wobei wir wieder $t = \frac{r}{s}$ substituiert haben. $\square$

Warnung: In 2.16 folgt die Existenz von $f(0+)$ aus der Voraussetzung an f (stückweise Stetigkeit). Hier ist die Existenz von $f(\infty)$ **vorausgesetzt**. Selbst wenn $\lim_{s\to 0+} s\mathscr{L}\{f\}(s)$ existiert, muss $f(\infty)$ nicht unbedingt existieren.

Beispiel: Die Funktion $\cos t$ ist beschränkt und $\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Es gilt $s\mathscr{L}\{\cos t\}(s) = \frac{s^2}{s^2+1} \to 0$ für $s \to 0+$, aber $\lim_{t\to\infty} \cos t$ existiert nicht.

2.18. Korrespondenzen: Gilt $\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, so nennt man $f(t)$ die *Originalfunktion* und $F(s)$ die *Bildfunktion*. Häufig schreibt man dann

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(s) \quad \text{oder} \quad F(s) \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, f(t)$$

und nennt dies eine *Korrespondenz* (der ausgefüllte Punkt steht auf der Seite der Bildfunktion). Gebräuchlich sind Tafeln für Korrespondenzen.

Beispiele: $\sin t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$, $e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$. Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)$, so gilt $e^{at}f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s-a)$.

3 Komplexe Analysis

3.1. Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ heißt in $z_0 \in G$ *komplex differenzierbar*, wenn der Limes

$$F'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

in $\mathbb{C}$ existiert. In diesem Fall heißt $F'(z_0)$ die *komplexe Ableitung von F in z_0*.

Die Funktion F heißt *holomorph* in G, falls F in **jedem** $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist.

Beispiele: (a) $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = 1$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) $F(z) = z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) $F(z) = e^z$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = e^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

3.2. Rechenregeln: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und seien $F, H : G \to \mathbb{C}$ in G holomorph. Dann sind $F + H$, $F \cdot H$ in G holomorph und

$$(F+H)'(z) = F'(z) + H'(z), \qquad (F \cdot H)'(z) = F'(z)H(z) + F(z)H'(z), \qquad \text{für alle } z \in G.$$

Ist $H \neq 0$ in G, so ist auch $\frac{F}{H}$ holomorph in G und

$$\left(\frac{F}{H}\right)'(z) = \frac{F'(z)H(z) - F(z)H'(z)}{H(z)^2}, \qquad z \in G.$$

Also: Summen-, Produkt- und Quotientenregel (solange der Nenner $\neq 0$ ist) gelten auch für die komplexe Differenzierbarkeit.

Ebenso gelten die Kettenregel und die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion auch für die komplexe Differenzierbarkeit. Die Beweise lassen sich übertragen.

Bemerkung: Ist F in G holomorph, so ist F in G stetig.

Beispiele: (1) $F(z) = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $F'(z) = nz^{n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Jedes Polynom $P(z)$ mit komplexen Koeffizienten ist auf $\mathbb{C}$ holomorph.

(2) $F(z) = z^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $F'(z) = -nz^{-n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jede rationale Funktion $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, wobei $P(z)$, $Q(z)$ komplexe Polynome sind, ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

(3) $F(z) = e^{1/z}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph mit $F'(z) = e^{1/z}(-z^{-2})$ für $z \neq 0$.

3.3. Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $F : G \to \mathbb{C}$. Es gilt $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. Durch $u(x, y) := (Re\,F)(x + iy)$ und $v(x, y) = (Im\,F)(x + iy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x + iy \in G$ erhält man eine Funktion $G \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$, die man mit den Methoden von Kapitel 19 in HM2 (mehrdimensionale Differentialrechnung) behandeln kann.

Ist F in $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$ komplex differenzierbar, sieht man anhand der Definition (mit $x + iy_0 \to x_0 + iy_0$):

$$F'(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\partial_x v(x_0, y_0).$$

Betrachtet man $x_0 + iy \to x_0 + iy_0$, erhält man

$$F'(z_0) = \partial_y v(x_0, y_0) - i\partial_y u(x_0, y_0),$$

so dass im Punkt (x_0, y_0) gilt:

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen heißen *Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen* (*CR-Dgln*) für u und v, die also auf G erfüllt sind, wenn F holomorph auf G ist. Umgekehrt gilt der

Ende Mo 26.05.14

Satz: Ist $(x, y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ eine C^1-Funktion auf G und gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, so ist die durch $F(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y)$ definierte Funktion in G holomorph.

Beispiel: Für die Funktion $F(z) = \overline{z}$ gilt $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind nicht erfüllt. Die Funktion ist also nicht holomorph.

Bemerkung: Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$. Die Multiplikation von $x + iy$ mit der komplexen Zahl $a + ib$ entspricht der Multiplikation des Vektors $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ mit der Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. In diesem Sinne entspricht $F'(z_0)$ der Matrix $\begin{pmatrix} Re\,F'(z_0) & -Im\,F'(z_0) \\ Im\,F'(z_0) & Re\,F'(z_0) \end{pmatrix}$. Die Ableitung im Sinne von HM2 Kapitel 19 (dh die Jacobimatrix) von $(x, y) \mapsto \binom{u(x,y)}{v(x,y)}$ ist hingegen $\begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$. Beim Vergleich erhält man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

3.4. Potenzreihen: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten (a_n) und Konvergenzradius $R \in (0, \infty]$ und Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann ist die durch die Potenzreihe gegebene Funktion

$$F : K(z_0, R) \to \mathbb{C}, z \mapsto F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

holomorph in $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, und es gilt

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z - z_0)^{n-1}, \qquad |z - z_0| < R.$$

Beispiele: $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ sind auf $\mathbb{C}$ holomorph.

3.5. Holomorphie von Laplacetransformierten: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ. Dann ist $F := \mathscr{L}\{f\}$ auf $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\}$ holomorph und

$$F'(s) = \mathscr{L}\{-tf(t)\}(s), \qquad Re\, s > \gamma,$$

bzw. $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \Longrightarrow F'(s) \bullet\!\!-\!\!\circ (-t)f(t)$.

Beweis. Nur für beschränktes f, dh $|f(t)| \leq M$. Sei $Re\, s > 2a > 0$ und $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $|h| \leq a$. Dann gilt für jedes $b > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} &= \int_0^\infty \frac{e^{-(s+h)t} - e^{-st}}{h} f(t)\, dt \\ &= \int_0^b \frac{e^{-ht} - 1}{h} e^{-st} f(t)\, dt + \int_b^\infty \left(\frac{e^{-ht} - 1}{-ht} \right) (-t) e^{-st} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert für $h \to 0$ gegen

$$\int_0^b (-t) e^{-st} f(t)\, dt$$

(das geht wie in 2.2). Den Betrag des Integranden im zweiten Integral schätzt man ab:

$$\leq \underbrace{\left| \frac{e^{-ht} - 1}{-ht} \right|}_{\leq e^{|h|t}} t e^{-(Re\, s)t} M \leq M t e^{-at}.$$

Das Integral hierüber wird für große b klein. □

Folgerung: Unter den obigen Voraussetzungen ist F in $\{s \in \mathbb{C} : Re\, s > \gamma\}$ beliebig oft komplex differenzierbar, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = \mathscr{L}\{(-t)^n f(t)\}(s), \qquad Re\, s > \gamma.$$

3.6. Kurvenintegrale: Eine *Kurve* ist hier eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, für die es $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ so gibt, dass γ auf jedem Intervall $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, stetig differenzierbar ist. Die Kurve γ heißt *einfach geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt und γ auf $[a, b)$ injektiv ist. Eine einfach geschlossene Kurve heißt *positiv orientiert*, wenn das von γ umlaufene Gebiet links von γ liegt.

Dabei heißt γ in $t_* \in [a, b]$ differenzierbar, falls der Limes

$$\dot{\gamma}(t_*) = \lim_{t \to t_*} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_*)}{t - t_*}$$

in $\mathbb{C}$ existiert.

Bemerkung: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to G$ differenzierbar. Dann ist $F \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ differenzierbar und

$$(F \circ \gamma)^{\cdot}(t) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t), \quad t \in [a, b],$$

vergleiche Bemerkung in 3.3.

Definition: Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Kurve und $F : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann definiert man das Kurvenintegral

$$\int_\gamma F(z)\,dz := \int_a^b F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt,$$

wobei die rechte Seite als $\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} F(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt$ zu verstehen ist, wenn $t_0, \dots, t_n$ wie oben in der Definition sind.

Das Integral ist invariant unter orientierungserhaltenden Umparametrisierungen.

Abschätzung: Sind F und γ wie in der Definition, so gilt

$$\Big| \int_\gamma F(z)\,dz \Big| \leq L(\gamma) \max\{|F(z)| : z \in \gamma([a, b])\},$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge von γ bezeichnet (siehe HM 2, 19.6).

Wichtiges Beispiel: Sei $r > 0$ und $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$. Dann ist γ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve, und es gilt $\dot{\gamma}(t) = ire^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Sei $F(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\int_\gamma z^n\,dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} r^n\,e^{itn}\,ir\,e^{it}\,dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt.$$

Für $n = -1$ ist das Kurvenintegral also $= 2\pi i$. Für $n \neq -1$ erhalten wir

$$= ir^{n+1} \Big[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big]_0^{2\pi} = 0,$$

da $e^{2\pi i(n+1)} = 1$. Beachte, dass F für $n \geq 0$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist und für $n < 0$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph ist.

Ende Mo 02.06.14

3.7. Cauchyscher Integralsatz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Für jede einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve $\gamma : [a, b] \to G$ gilt dann

$$\int_\gamma F(z)\,dz = 0.$$

Für den Begriff *einfach zusammenhängend* siehe HM2 20.3, anschaulich bedeuted einfach zusammenhängend hier "ohne Löcher". Z.B. sind konvexe Gebiete einfach zusammenhängend. Dabei heißt $G \subset \mathbb{C}$ *konvex*, falls zu je zwei Punkten $z_0, z_1 \in G$ auch die Verbindungsstrecke $\{(1 - t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}$ in G enthalten ist. Auch $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist einfach zusammenhängend.

Beispiel: Damit ist das Integral im Beispiel von 3.6 $= 0$ für $n \geq 0$.

Bemerkungen zum Beweis: Man überlegt sich zunächst, dass die Aussage äquivalent ist zur Existenz einer holomorphen Funktion $H : G \to \mathbb{C}$ mit $H' = F$ auf G (es ist dann nämlich

$$\int_\gamma H'(z)\,dz = \int_a^b H'(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt = \int_a^b (H\circ\gamma)^\cdot(t)\,dt = H(\gamma(b)) - H(\gamma(a)) = 0,$$

vergleiche mit HM2 20.4, wo die Situation ähnlich ist).

Ist G konvex, so erhält man ein solches H, indem man $z_* \in G$ fixiert und $H(z) := \int_{S[z_*,z]} F(w)\,dw$ setzt. Gilt der Satz für "Dreiecke" γ, so hat man für $z, z_0 \in G$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - F(z_0)\Big| &= \Big|\frac{1}{z-z_0}\int_{S[z_0,z]} (F(w)-F(z_0))\,dw\Big| \\ &\leq \frac{1}{|z-z_0|}\,|z-z_0|\,\max\{|F(w)-F(z_0)| : w \in S[z_0,z]\} \to 0\end{aligned}$$

für $z \to z_0$, da F in z_0 stetig ist.

Es reicht deshalb, die Aussage für "Dreiecke" γ zu zeigen (Satz von Cauchy-Goursat).

Beispiele: (1) $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $F(z) = z^n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$ ist. Dann ist $\int_\gamma z^n\,dz = 0$, da F auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, $\mathbb{C}$ konvex ist und γ einfach geschlossen.

(2) Sei γ wie eben und $F(z) = e^z$. Nach denselben Argumenten wie in (1) ist $\int_\gamma e^z\,dz = 0$.

(3) $F(z) = 1/z$ ist in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ holomorph, aber $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0$. Das Gebiet $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

3.8. Cauchysche Integralformel: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\gamma : [a, b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Dann gilt für jedes z, welches "innerhalb von γ" liegt:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Beweisidee: Man überlegt sich, dass 3.7 auch noch gilt, wenn die Funktion auf G stetig und in $G\setminus\{z\}$ holomorph ist. Diese Variante von 3.7 wendet man auf die Funktion $\zeta \mapsto \frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}$ an und beachtet das Beispiel aus 3.6 für $n = -1$:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)-F(z)}{\zeta-z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta - F(z)\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta}_{=1}.$$

Beispiele: (1) Die Anwendung auf $F(\zeta) = 1$ gibt das Ergebnis von 3.6 im Fall $n = -1$ (man nehme $z = 0$).

(2) Nimmt man $F(\zeta) = e^\zeta$ und $z = 0$, sowie $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, so erhält man

$$\int_\gamma \frac{e^\zeta}{\zeta}\, d\zeta = 2\pi i.$$

3.9. Folgerungen: (a) Holomorphe Funktionen sind beliebig oft komplex differenzierbar (man muss hier "unter dem Integralzeichen differenzieren", was sich aber rechtfertigen lässt). Unter den Voraussetzungen von 3.8 gilt

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Holomorphe Funktionen lassen sich lokal in **Potenzreihen** entwickeln. Ist G offen, $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$, so gilt

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Die Reihe konvergiert dabei absolut und für jedes $\rho \in (0, R)$ auf $\{z : |z - z_0| \le \rho\}$ gleichmäßig.

Beweis. Verwende die Formel in 3.8, wobei γ der Kreis um z_0 mit Radius R ist und $\{z : |z - z_0| \le R\} \subset G$ gilt. Entwickle den Integranden in eine geometrische Reihe

$$\frac{F(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{F(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}(z - z_0)^k.$$

Nun vertausche man Integration und Reihe (was man darf, da für $|z - z_0| \le \rho < R$ die Reihe gleichmäßig konvergiert) und verwende die Formel in (a). □

3.10. Laurententwicklung: Ist G offen, $z_0 \in G$ und $F : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt z_0 eine *isolierte Singularität von F*. Es gibt dann eindeutig bestimmte Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{Z}$, derart, dass gilt

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad 0 < |z - z_0| < R,$$

für jedes $R > 0$ mit $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$. Konvergenz der Reihe ist zu verstehen als Konvergenz von $\sum_{k=-\infty}^{-1}$ (*Hauptteil* der Reihe) und $\sum_{k=0}^{\infty}$ (*Nebenteil* der Reihe). Die Reihe Ende Mo 16.06.14

konvergiert dabei absolut und für alle $0 < \rho_0 < \rho_1 < R$ auf $\{z : \rho_0 \leq |z - z_0| \leq \rho_1\}$ gleichmäßig. Der Koeffizient a_{-1} heißt *Residuum von F in z_0*, geschrieben

$$\operatorname{res}(F; z_0) := a_{-1}.$$

Die isolierte Singularität z_0 von F heißt *hebbare Singularität*, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$, *Pol n-ter Ordnung*, falls $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -n$ ist, und *wesentliche Singularität* sonst.

Beweisidee zur Laurententwicklung: Nur für $z_0 = 0$. Ist $0 < \rho_0 < |z| < \rho_1 < R$, so gilt wegen 3.8:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =: F_1(z) - F_0(z),$$

wobei $\gamma_j : [0, 2\pi] \to G$, $\gamma_j(t) = \rho_j e^{it}$. Die Funktionen $F_1(z)$ und $F_0(\frac{1}{z})$ lassen sich in Potenzreihen um 0 entwickeln, die für $|z| < \rho_1$ bzw. $|z| < 1/\rho_0$ konvergieren. Diese ergeben Neben- und Hauptteil der Laurentreihe.

Beispiel: (a) $F(z) = z^{-n}$, wobei $n \in \mathbb{N}$, hat in $z_0 = 0$ einen Pol n-ter Ordnung. Dabei gilt $\operatorname{res}(z^{-1}; 0) = 1$ und $\operatorname{res}(z^{-n}; 0) = 0$ für $n \geq 2$.

(b) $F(z) = e^{2/z}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Wegen $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{z^{-k}}{k!}$ für $z \neq 0$ gilt $\operatorname{res}(F; 0) = 2$.

Bemerkung (ohne Beweis): Die Funktion F hat einen Pol in z_0 genau dann, wenn $\lim_{z \to z_0} |F(z)| = \infty$ gilt. Die Singularität in z_0 ist hebbar genau dann, wenn $\lim_{z \to z_0} F(z)$ existiert.

3.11. Residuensatz: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und konvex und $\gamma : [a, b] \to G$ eine einfach geschlossene, positiv orientierte Kurve. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_m \in G$ verschieden und innerhalb von γ, und sei $F : G \setminus \{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt

$$\int_\gamma F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(F; z_j).$$

Beweis. Mithilfe von 3.7 ist das Kurvenintegral links

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} F(z)\, dz,$$

wobei γ_j jeweils ein kleiner Kreis um z_j ist, so dass man die Laurententwicklung von F um z_j verwenden kann. Dann vertauscht man Integral und Reihe (gleichmäßige Konvergenz!) und verwendet das Beispiel in 3.6. □

3.12. Berechnung von Residuen: (a) Besitzt F in z_0 einen höchstens n-fachen Pol ($n \in \mathbb{N}$), dann gilt

$$\operatorname{res}(F; z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n F(z)\Big)\right)\Bigg|_{z=z_0}.$$

Beweis. Unter diesen Voraussetzungen ist

$$F(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{und} \quad G(z) := (z-z_0)^n F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z-z_0)^k$$

für $z \neq z_0$ in einer Umgebung von z_0. Vergleich mit der Potenzreihe von $G(z)$ ergibt $a_{-1} = \frac{G^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$. □

(b) Ist $F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}$ mit $G, H : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $G(z_0) \neq 0$, $H(z_0) = 0$, $H'(z_0) \neq 0$, so gilt

$$\operatorname{res}(F; z_0) = \frac{G(z_0)}{H'(z_0)}.$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist z_0 einfache Nullstelle von $H(z)$, also ist z_0 hebbare Singularität von $(z-z_0)F(z)$. Damit ist z_0 einfache Polstelle von F und (a) ergibt die angegebene Formel. □

3.13. Die komplexe Umkehrformel: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die *stückweise glatt* ist in dem Sinne, dass eine Folge $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \to \infty$ existiert mit

(i) f ist in $[0,\infty) \setminus \{t_j : j \in \mathbb{N}_0\}$ stetig differenzierbar,
(ii) die einseitigen Grenzwerte $f(t_j+)$, $f'(t_j+)$, $j \in \mathbb{N}_0$, und $f(t_j-)$, $f'(t_j-)$, $j \in \mathbb{N}$, existieren in $\mathbb{C}$.

In Punkten t_j, in denen f nicht differenzierbar ist, setzen wir $f'(t_j) := (f'(t_j+)+f'(t_j-))/2$. Es seien f und f' von exponentieller Ordnung γ.

Sei $F(s) := \mathscr{L}\{f\}(s)$ für $Re\, s > \gamma$. Für jedes $c > \gamma$ gilt dann

$$\lim_{A\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} F(s)\, ds = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \frac{1}{2} f(0+) & , t = 0 \\ f(t) & , t > 0, f \text{ in } t \text{ stetig} \\ \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) & , t > 0, f \text{ in } t \text{ unstetig} \end{cases}.$$

(ohne Beweis)

3.14. Spezialfall: Die Zeitfunktion f sei so, dass zu $F(s) := \mathscr{L}\{f\}(s)$ verschiedene $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $\widetilde{F} : \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\} \to \mathbb{C}$ existieren mit $F(s) = \widetilde{F}(s)$ für $Re\, s > \gamma$. Ende Mo 23.06.14

Bemerkung: Ein solches $\widetilde{F}$ ist eindeutig bestimmt! (ohne Beweis)

Für festes $A > 0$ schließen wir den Weg $g_A : [-A, A] \to \mathbb{C}$, $g_A(r) = c + ir$, durch einen Kreisbogen $\gamma_R(\varphi) = Re^{i\varphi}$, wobei $R^2 = c^2 + A^2$ und der Winkel φ ein geeignetes Intervall durchläuft. Für große A liegen alle Singularitäten $a_1, a_2, \ldots, a_m$ innerhalb der durch g_A und γ_R gebildeten einfach geschlossenen, positiv orientierten Kurve, und nach dem Residuensatz 3.11 gilt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} F(s)\, ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} e^{st} \widetilde{F}(s)\, ds = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(e^{st} \widetilde{F}(s); a_j).$$

Wir interessieren uns für den Limes $A \to \infty$ des ersten Kurvenintegrals. Für $A \to \infty$ gilt auch $R \to \infty$ und man kann gegebenenfalls das folgende Lemma anwenden.

3.15. Jordansches Lemma: Die Funktion H sei auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R_0\}$ holomorph und es gelte $|H(z)| \leq C(R)$ für $|z| = R$ mit $C(R) \to 0$ $(R \to \infty)$. Dann gilt für jedes $t > 0$:

$$\int_{\gamma_R} e^{st} H(s)\, ds \to 0 \quad (R \to \infty),$$

wobei $\gamma_R(\varphi) := Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

Folgerung: Sind in der Situation von 3.14 die Voraussetzungen von 3.15 für $H = \widetilde{F}$ erfüllt, so ist für $t > 0$:

$$\lim_{A \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iA}^{c+iA} e^{st} \widetilde{F}(s)\, ds = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}(e^{st} \widetilde{F}(s); a_j).$$

Beispiel: Sei $\mathscr{L}\{f\}(s) = F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ mit komplexen Polynomen $P(s)$, $Q(s)$ und $\operatorname{Grad} P(s) < \operatorname{Grad} Q(s)$, wobei

$$Q(s) = (s - a_1) \cdot (s - a_2) \cdot \ldots \cdot (s - a_n)$$

mit *verschiedenen* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$f(t) = \sigma(t) \sum_{j=1}^{n} A_j e^{a_j t}, \quad \text{wobei } A_j = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

(*Formel von Heaviside*), denn in diesem Fall ist nach 3.12 (b):

$$\operatorname{res}(e^{st} \frac{P(s)}{Q(s)}; a_j) = \left(e^{st} \frac{P(s)}{Q'(s)} \right)\Big|_{s=a_j} = \frac{P(a_j)}{Q'(a_j)}\, e^{a_j t}$$

für $t > 0$.

Beispiel: $F(s) = \frac{1}{s(s+1)}$. Hier ist $a_1 = 0, a_2 = -1$ und $P(s) = 1, Q(s) = s^2+s, Q'(s) = 2s+1$ und also

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) = \frac{P(0)}{Q'(0)}\, e^{0t} + \frac{P(-1)}{Q'(-1)}\, e^{-t} = 1 - e^{-t}.$$

3.16. Logarithmus und allgemeine Potenz: Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ kann man schreiben als $z = |z|e^{i\varphi}$. Dabei heißt φ *Argument* von z, geschrieben $\arg z$. Das Argument ist **nicht eindeutig**: Ist φ ein Argument von z, so auch $\varphi + 2k\pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$.

Der *Hauptzweig des Arguments* $\operatorname{Arg} z$ nimmt für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ Werte in $(-\pi, \pi)$ an.

Definition: Der Hauptzweig Log des Logarithmus ist gegeben durch

$$\operatorname{Log} z := \ln|z| + i\operatorname{Arg} z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Andere Zweige des Logarithmus erhält man, indem man andere Zweige des Arguments betrachtet.

Bemerkung: $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \{w \in \mathbb{C} : |Im\, w| < \pi\}$ ist holomorph und bijektiv mit Umkehrabbildung exp. Es gilt

$$\operatorname{Log}' z = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Allgemeine Potenz: Für $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man durch

$$z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$$

den Hauptzweig der α-ten Potenz.

Wurzeln: Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man für den Hauptzweig der n-ten Wurzel

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \exp(i\operatorname{Arg} z/n), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Berücksichtigt man die anderen Werte des Arguments, so sieht man, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau n verschiedene n-te Wurzeln besitzt.

3.17. Konforme Abbildungen: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine injektive holomorphe Abbildung $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ ist *winkeltreu*: Sind $\gamma, \psi : [-1, 1] \to G$ stetig differenzierbare Kurven mit $\gamma(0) = z_0 = \psi(0)$, die sich in z_0 im Winkel φ schneiden, so schneiden sich die Bildkurven $F \circ \gamma$ und $F \circ \psi$ in $F(z_0)$ ebenfalls im Winkel φ.

Solche Abbildungen heißen auch *konform*.

Anwendung: In der zweidimensionalen Elektrostatik schneiden sich Feldlinien und Äquipotentiallinien im rechten Winkel. Diese Beziehung bleibt unter konformen Abbildungen erhalten.

In desen Zusammenhang gehört auch der folgende Satz.

3.18. Satz von der Gebietstreue, Maximumsprinzip: (a) Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist $F(G) \subset \mathbb{C}$ wieder ein Gebiet.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Hat $z \mapsto |F(z)|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist F konstant.

Ende
Mo
30.06.14

4 Distributionen

4.1. Die Grundidee für Distributionen: Statt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, betrachtet man Abbildungen

$$T_f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt.$$

Hierbei ist

$$\mathscr{D} := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) : \text{es gibt } a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } \varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \notin [a,b]\,\}$$

der Raum der C^∞-Funktionen *mit kompaktem Träger*.

Beispiel: Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) := \begin{cases} e^{-(1-t^2)^{-1}} & ,|t| < 1 \\ 0 & ,|t| \geq 1 \end{cases}$, gehört zu $\mathscr{D}$ (mit $a = -1$ und $b = 1$).

Bemerkung: Die Abbildung T_f ist **linear** und man kann die Funktion f aus T_f im wesentlichen zurückgewinnen.

Beispiel: Diracsche Deltafunktion $\delta = \delta_0$ (oder Diracstoß in 0, "Masse 1 sitzt im Punkt 0"). Der Vorstellung nach wird δ_0 approximiert durch $g_n := ng(n\cdot)$, wobei $g \geq 0$ integrierbar mit $\int g = 1$ und $g = 0$ außerhalb von $[-1, 1]$. Man hat dann für $\varphi \in \mathscr{D}$:

$$T_{g_n}(\varphi) = n\int_{-1/n}^{1/n} g(nt)\varphi(t)\,dt = \int_{-1}^{1} g(\tau)\varphi(\tau/n)\,d\tau \to \varphi(0) \quad (n \to \infty),$$

und setzt also $\delta_0 : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\delta_0(\varphi) := \varphi(0)$. Diese Abbildung ist linear, und es gibt **keine** integrierbare Funktion f mit $\delta_0 = T_f$!

Analog definiert man den *Diracstoß* δ_b *in* $b \in \mathbb{R}$ durch $\delta_b(\varphi) := \varphi(b)$ für $\varphi \in \mathscr{D}$.

Bemerkung: Die in der Definition von Distributionen eigentlich noch enthaltene *Stetigkeit* $\mathscr{D} \to \mathbb{C}$ ignorieren wir zunächst.

4.2. Ableitung von Distributionen: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine C^1-Funktion, so gilt für $\varphi \in \mathscr{D}$ nach der Regel der partiellen Integration

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = T_f(-\varphi').$$

Dies motiviert die

Definition: Ist $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung, so definiert man die *Ableitung* DT *von* T durch

$$DT(\varphi) := T(-\varphi'), \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Diese Abbildung ist wieder linear.

Beispiele: (1) Es gilt $D\delta_0(\varphi) = \delta_0(-\varphi') = -\varphi'(0)$.

(2) Ist $\sigma(t)$ der Einheitssprung, so ist

$$DT_\sigma(\varphi) = T_\sigma(-\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(t)\,dt = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Also ist die distributionelle Ableitung des Einheitssprungs $\sigma(t)$ der Diracstoß δ_0 in 0 (dh der *Einheitsimpuls*).

Bemerkung: Analog setzt man für jedes $n \in \mathbb{N}$: $D^n T(\varphi) := (-1)^n T(\varphi^{(n)})$.

4.3. Ableitung von stückweise glatten Funktionen: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise glatt im Sinne von 3.13 ist (mit einer entsprechenden Folge (t_j)).

Dann ist

$$\begin{aligned}
(DT_f)(\varphi) &= \sum_{j=0}^\infty \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)(-\varphi'(t))\,dt \\
&= \sum_{j=0}^\infty \Big[-f(t)\varphi(t)\Big|_{t_j+}^{t_{j+1}-} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t)\varphi(t)\,dt\Big] \\
&= \int_0^\infty f'(t)\varphi(t)\,dt + \sum_{j=0}^\infty f(t_j+)\varphi(t_j) - f(t_{j+1}-)\varphi(t_{j+1}) \\
&= T_{f'}(\varphi) + f(0+)\varphi(0) + \sum_{j=1}^\infty (f(t_j+) - f(t_j-))\varphi(t_j),
\end{aligned}$$

also

$$D(T_f) = T_{f'} + f(0+)\delta_0 + \sum_{j=1}^\infty \underbrace{(f(t_j+) - f(t_j-))}_{\text{Sprunghöhe von } f \text{ in } t_j} \delta_{t_j}.$$

Ist f zusätzlich in $(0, \infty)$ stetig, so hat man

$$D(T_f) = T_{f'} + f(0+)\delta_0.$$

Verallgemeinerte Ableitung für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, für die

$$f_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f_+(t) := \sigma(t)f(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ f(t) & , t \geq 0 \end{cases},$$

auf $[0, \infty)$ stückweise glatt ist und für die $f(0-)$ existiert (siehe z.B. bei Föllinger):

$$\dot{f} := T_{(f_+)'} + \sum_{j=0}^\infty (f(t_j+) - f(t_j-))\delta_{t_j} = D(T_{f_+}) - f(0-)\delta_0.$$

Hierdurch wird eine eventuelle Vorgeschichte von f für $t < 0$ berücksichtigt. Beachte, dass $\dot{f}$ eine Distribution ist.

Beispiel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(t) := \begin{cases} 1 & , t \in [n, n+1] \text{ und } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gerade} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$.
Hier ist $t_j = j$ für $j \in \mathbb{N}_0$ mit Sprunghöhe $(-1)^j$. Es gilt $f'(t) = 0$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ und

$$D(T_f) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \delta_j.$$

Die Funktion f ist beschränkt, also von exponentieller Ordnung 0. Die Distribution T_f ist von exponentieller Ordnung 0 mit positivem Träger.

Ende Mo 07.07.14

4.4. Laplacetransformierbare Distributionen: Eine lineare Abbildung $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ heißt *Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger*, falls es $M \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$|T(\varphi)| \leq M \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \int_0^{\infty} e^{\gamma t} |\varphi^{(j)}(t)| \, dt}_{=: p_{k,\gamma}(\varphi)}.$$

Bemerkung: Es gibt dann eine eindeutig bestimmte lineare Fortsetzung $\widetilde{T}$ von T auf $\mathscr{D}_{k,\gamma} := \{\varphi \in C^k : p_{k,\gamma}(\varphi) < \infty\}$, die derselben Abschätzung genügt. Wir bezeichnen die Fortsetzung der Einfachheit halber auch mit T.

Beispiele: (1) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise stetig ist und $|f(t)| \leq M e^{\gamma t}$, $t \geq 0$, genügt, so ist T_f eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger:

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)||\varphi(t)| \, dt \leq M p_{0,\gamma}(\varphi).$$

(2) Für $b \geq 0$ ist δ_b für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger: Wegen

$$\delta_b(\varphi) = \varphi(b) = -\int_b^{\infty} \varphi'(t) \, dt$$

gilt $|\delta_b(\varphi)| \leq p_{1,0}(\varphi) \leq p_{1,\gamma}(\varphi)$ für $\gamma \geq 0$. Für $\gamma < 0$ ist

$$\delta_b(\varphi) = \varphi(b) = -e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} (e^{\gamma t} \varphi)'(t) \, dt = -\gamma e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} e^{\gamma t} \varphi(t) \, dt - e^{-\gamma b} \int_b^{\infty} e^{\gamma t} \varphi'(t) \, dt,$$

und also

$$|\delta_b(\varphi)| \leq \max\{|\gamma|, 1\} e^{b|\gamma|} p_{1,\gamma}(\varphi).$$

4.5. Laplacetransformation von Distributionen: Wir definieren $e_s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ für $s \in \mathbb{C}$ durch $e_s(t) := e^{-st}$, $t \in \mathbb{R}$.

Beobachtung: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung γ ist, so gilt

$$\mathscr{L}\{f\}(s) = T_f(e_s), \qquad Re\, s > \gamma.$$

Definition: Ist $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger, so definiert man die Laplacetransformierte $\mathscr{L}\{T\}$ durch

$$\mathscr{L}\{T\}(s) := T(e_s), \quad Re\, s > \gamma.$$

Für $Re\, s > \gamma$ gilt nämlich $e_s \in \mathscr{D}_{k,\gamma}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$:

$$p_{k,\gamma}(e_s) = \sum_{j=0}^{k} \int_0^\infty e^{\gamma t} |s|^j |e^{-st}|\, dt = \frac{\sum_{j=0}^{k} |s|^j}{Re\, s - \gamma}.$$

Beispiele: (1) $\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) = 1$ für jedes $s \in \mathbb{C}$.

(2) Für $b > 0$ gilt $\mathscr{L}\{\delta_b\}(s) = e^{-sb}$ für jedes $s \in \mathbb{C}$.

(3) $\mathscr{L}\{D\delta_0\}(s) = -e_s'(0) = s$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und allgemeiner $\mathscr{L}\{D^n\delta_0\}(s) = s^n$ für $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.

4.6. Ableitungsregel: Ist $T : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ eine Distribution von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger, so gilt für $Re\, s > \gamma$:

$$\mathscr{L}\{DT\}(s) = s\mathscr{L}\{T\}(s) \quad \text{und} \quad \mathscr{L}\{D^nT\}(s) = s^n\mathscr{L}\{T\}(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist nämlich

$$\mathscr{L}\{DT\}(s) = DT(e_s) = T(-e_s') = sT(e_s) = s\mathscr{L}\{T\}(s).$$

Bemerkung: (a) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise glatt und von exponentieller Ordnung γ ist, so ist

$$\mathscr{L}\{D(T_f)\}(s) = s\mathscr{L}\{T_f\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s), \qquad Re\, s > \gamma.$$

Andererseits ist mithilfe von 4.3:

$$\mathscr{L}\{DT_f\}(s) = \mathscr{L}\{T_{f'}\}(s) + f(0+) + \sum_{j=1}^{\infty} (f(t_j+) - f(t_j-))e^{-t_j s}.$$

Somit haben wir, falls auch f' von exponentieller Ordnung γ ist,

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+) - \sum_{j=1}^{\infty} (f(t_j+) - f(t_j-))e^{-t_j s}$$

für $Re > \gamma$. Ist f zusätzlich in $(0, \infty)$ stetig, so erhalten wir die Formel aus 2.12 zurück.

Beispiel: Für die Funktion aus dem Beispiel in 4.3 gilt

$$\mathscr{L}\{D(T_f)\}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j e^{-j}, \quad Re\, s > 0.$$

Bemerkung: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ auf $[0, \infty)$ stückweise glatt und von exponentieller Ordnung γ und existiert $f(0-)$, so gilt

$$\mathscr{L}\{\dot{f}\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0-), \quad Re\, s > \gamma,$$

siehe bei Föllinger.

4.7. Impulsantwort differentieller Systeme: In der Systemtheorie liefert ein System auf einen Input $u(t)$ einen Output $y(t)$. Hierbei sind u und y im allgemeinen Distributionen.

Die *Impulsantwort* g eines Systems ist der Output y des Systems, wenn man als Input u den Einheitsimpuls δ_0 anlegt. Dabei sei das System vor $t = 0$ im Ruhezustand. Die Laplacetransformierte $G(s) := \mathscr{L}\{g\}(s)$ heißt *Übertragungsfunktion* des Systems.

Differentielle Systeme sind von der Form

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u' + b_0 u$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$. Wir nehmen an, dass das System vor dem Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe ist (dh $y(t) = 0$ und auch $u(t) = 0$ für $t < 0$). Wir interpretieren die Ableitungen als **distributionelle Ableitungen** nach 4.2 [1] und erhalten für $u = \delta_0$:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

als Übertragungsfunktion, dh als Laplacetransformierte der Impulsantwort g. Mittels Partialbruchzerlegung lässt sich die Impulsantwort $g = \mathscr{L}^{-1}\{G\}$ bestimmen.

Bemerkung: Vergleicht man mit 2.15, so sieht man

$$G(s) = \mathscr{L}\{g(t)\}(s) = s\mathscr{L}\{h(t)\}(s),$$

und die Impulsantwort $g(t)$ ist distributionelle Ableitung der Sprungantwort $h(t)$ aus 2.15. Die dort betrachteten Systeme entsprechen dem Spezialfall $m = 0$.

[1] die hier – unter geeigneten Voraussetzungen an y und u – mit verallgemeinerten Ableitungen nach 4.3 übereinstimmen

Beispiele: (1) Das System sei gegeben durch $y'' - 4y' + 4y = u$. Die Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = (s^2 - 4s + 4)^{-1} = (s-2)^{-2}.$$

Die Impulsantwort des Systems ist also

$$g(t) = \sigma(t)te^{2t}.$$

(2) Das System sei gegeben durch $y'' - 4y' + 4y = u' - u$. Die Übertragungsfunktion ist dann

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2 - 4s + 4} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}.$$

Die Impulsantwort des Systems ist somit

$$g(t) = \sigma(t)\Big(e^{2t} + te^{2t}\Big).$$

Die Bedeutung der Impulsantwort wird ersichtlich, wenn man die Faltung von Distributionen und allgemeine lineare zeitinvariante Systeme betrachtet. Die Prinzipien sind im folgenden Bonus zusammengestellt.

BONUS – Nicht in der Vorlesung gebracht

4.8. Translationen (Verschiebungen) von Distributionen: Definiere für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{R}$ die *Verschiebung von f um b nach rechts* durch

$$\tau_b f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (\tau_b f)(t) = f(t-b).$$

Für stetiges f und $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt dann:

$$T_{\tau_b f}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_b f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-b)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\varphi(\xi+b)\,d\xi = T_f(\tau_{-b}\varphi).$$

Wir definieren also für Distributionen T und $b \in \mathbb{R}$ die um b nach rechts verschobene Distribution $\tau_b T$ durch

$$\tau_b T(\varphi) = T(\tau_{-b}\varphi), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

4.9. Faltung von Distributionen: Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, die auf $[0, \infty)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$ sind, so gilt $f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, und für $\varphi \in \mathscr{D}$ nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$T_{f*g}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\int_{-\infty}^{\infty} g(r)\varphi(r+t)\,dr\,dt = T_f(t \mapsto T_g(\tau_{-t}\varphi)).$$

Wir setzen also für Distributionen $S, T \in \mathscr{D}'$ von exponentieller Ordnung γ mit positivem Träger:

$$T * S(\varphi) = T(t \mapsto S(\tau_{-t}\varphi)), \quad \varphi \in \mathscr{D}.$$

Dann ist $T * S$ für jedes $\varepsilon > 0$ von exponentieller Ordnung $\gamma + \varepsilon$ mit positivem Träger und

$$\mathscr{L}\{T * S\}(s) = \mathscr{L}\{T\}(s) \cdot \mathscr{L}\{S\}(s), \quad Re\, s > \gamma.$$

Beweis der Formel: Wir haben

$$\mathscr{L}\{T * S\}(s) = T * S(e_s) = T(t \mapsto S(\tau_{-t}e_s))$$

und $\tau_{-t}e_s(u) = e_s(t+u) = e^{-st}e_s(u)$, also

$$S(\tau_{-t}e_s) = e^{-st}\, S(e_s) = e_s(t)\, \mathscr{L}\{S\}(s)$$

und somit

$$\mathscr{L}\{T * S\}(s) = T(e_s\, \mathscr{L}\{S\}(s)) = T(e_s)\, \mathscr{L}\{S\}(s) = \mathscr{L}\{T\}(s)\mathscr{L}\{S\}(s).$$

Beispiele: (1) Es gilt $T * \delta_0 = \delta_0 * T = T$.

(2) Für $b > 0$ gilt $\delta_b * T = \tau_b T$, denn für $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt

$$(\delta_b * T)(\varphi) = T(t \mapsto \delta_b(\tau_{-t}\varphi)) = T(t \mapsto \varphi(b+t)) = T(\tau_{-b}\varphi) = (\tau_b T)(\varphi).$$

(3) Man kann zeigen, dass $D(T * S) = (DT) * S = T * (DS)$ gilt, insbesondere ist $DT = (D\delta_0) * T$.

Alle diese Beispiele sind mit der Faltungsregel für die Laplacetransformation von Distributionen konsistent.

4.10. Konvergenz von Distributionen: Eine Folge (T_n) von Distributionen heißt *konvergent* gegen eine Distribution T, falls für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt:

$$T_n(\varphi) \to T(\varphi) \quad (n \to \infty).$$

Beispiel: Im Beispiel in 4.1 gilt $T_{g_n} \to \delta_0$ $(n \to \infty)$.

4.11. Anwendung: Lineare zeitinvariante Übertragungsglieder: Ein Übertragungsglied wird repräsentiert durch eine Abbildung ϕ, die "Eingängen" (Inputs) u gewisse "Ausgänge" (Outputs) y zuordnet: $y = \phi(u)$. Hierbei sind sowohl die Inputs u als auch die Outputs y Distributionen.

Wir verlangen, dass das Übertragungsglied folgende Eigenschaften hat:

- **Linearität:** $\phi(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\phi(u_1) + \beta\phi(u_2)$;
- **Stetigkeit:** Gilt $u_n \to u$ in $\mathscr{D}'$, so folgt $\phi(u_n) \to \phi(u)$ in $\mathscr{D}'$;
- **Zeitinvarianz:** Ist $b > 0$, so gilt $\phi(\tau_b u) = \tau_b \phi(u)$;
- **Kausalität und exponentielle Beschränktheit:** Ist u exponentiell beschränkt mit positivem Träger, so ist auch $y = \phi(u)$ exponentiell beschränkt mit positivem Träger.

Hierbei bedeutet "Kausalität", dass die Wirkung y nicht *vor* der Ursache u einsetzen kann (dh: ist $u = 0$ vor $t = 0$, so ist auch $y = 0$ vor $t = 0$), und "exponentielle Beschränktheit" bedeutet, dass die Distribution von exponentieller Ordnung γ für irgendein reelles γ ist.

Für ein solches Übertragungsglied, das durch die Abbildung ϕ repräsentiert wird, setzen wir $g := \phi(\delta_0)$. Dann ist g exponentiell beschränkt mit positivem Träger. Für $b > 0$ gilt wegen der Zeitinvarianz

$$\delta_b * g = \tau_b g = \tau_b \phi(\delta_0) = \phi(\tau_b \delta_0) = \phi(\delta_b).$$

Wegen Linearität und Stetigkeit folgt

$$\phi(T_f) = g * T_f$$

für jede Funktion f, die auf einem Intervall $[a, b] \subset [0, \infty)$ stetig ist. Dazu approximiert man

$$T_f(\varphi) = \int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$$

durch Riemann-Summen

$$\sum_{j=1}^{m} f(t_j)\varphi(t_j)(t_j - t_{j-1}) = \Big(\sum_{j=1}^{m} f(t_j)(t_j - t_{j-1})\Big)\,\delta_{t_j}(\varphi).$$

Ein weiteres Approximationsargument zeigt, dass $\phi(u) = g * u$ für alle Distributionen u, die exponentiell beschränkt mit positivem Träger sind.

Durch Laplacetransformation (vgl. die Faltungsregel in 4.9) erhalten wir für $y = \phi(u) = g * u$:

$$\mathscr{L}\{y\}(s) = G(s) \cdot \mathscr{L}\{u\}(s), \quad Re\, s \text{ groß},$$

wobei $G(s) := \mathscr{L}\{g\}(s)$ *Übertragungsfunktion* des Übertragungsgliedes heißt.

Die (komplizierte) Faltung mit der sogenannten *Gewichtsfunktion* g geht also unter Laplacetransformation über in die (einfache) Multiplikation mit der Übertragungsfunktion $G(s)$. Wegen $g = \phi(\delta_0)$ nennt man g auch die *Impulsantwort* des Systems (dh die Antwort des Systems auf den *Einheitsimpuls* δ_0). Die *Sprungantwort* h des Systems ist im übrigen gegeben durch $h = \phi(T_\sigma) = g * T_\sigma$.

Bemerkung: Für $\varphi \in \mathscr{D}$ gilt

$$(g * T_\sigma)(\varphi) = g(t \mapsto T_\sigma(\tau_{-t}\varphi)) = g(t \mapsto \int_t^\infty \varphi(\xi)\, d\xi),$$

woraus $Dh(\varphi) = h(-\varphi') = g(\varphi)$, also $Dh = g$ folgt. Die Impulsantwort des Systems ist also die distributionelle Ableitung der Sprungantwort.

Ende des BONUS

5 Fouriertransformation und zweiseitige Laplacetransformation

5.1. Zweiseitige Laplacetransformation: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *stückweise stetig*, dh es gibt eine Doppelfolge $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $t_n < t_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $|t_n| \to \infty$, $|n| \to \infty$, so, dass für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die Funktion f auf (t_n, t_{n+1}) stetig ist und die Grenzwerte $f(t_n\pm)$ existieren. Es gelte $|f(t)| \le Me^{-\gamma|t|}$, $t \in \mathbb{R}$, für ein $\gamma > 0$ und ein $M > 0$. Die *zweiseitige Laplacetransformation von* f ist definiert durch

$$\mathscr{L}_{II}\{f\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{b\to\infty, a\to-\infty} \int_a^b e^{-st} f(t)\, dt,$$

für diejenigen $s \in \mathbb{C}$, für die dieses Integral konvergiert.

Konvergenz: Das Integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ konvergiert absolut für $Re\, s > -\gamma$ (bekannt). Das Integral $\int_{-\infty}^0 e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{s\tau} f(-\tau)\, d\tau$ konvergiert absolut für $Re(-s) > -\gamma$, dh für $Re\, s < \gamma$.

Bemerkung: Aus 3.5 erhalten wir, dass die Funktion $F(s) := \mathscr{L}_{II}\{f\}(s)$ auf $\{s \in \mathbb{C} : |Re\, s| < \gamma\}$ holomorph ist mit

$$F'(s) = \mathscr{L}_{II}\{(-t)f(t)\}(s), \quad |Re\, s| < \gamma.$$

Beispiel: $f(t) = e^{-a|t|}$, wobei $\gamma = Re\, a > 0$. Es gilt für $|Re\, s| < \gamma$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-a|t|}\, dt &= \int_0^\infty e^{-(s+a)t}\, dt + \int_{-\infty}^0 e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{1}{s+a} + \int_0^\infty e^{(s-a)\tau}\, d\tau \\ &= \frac{1}{a+s} + \frac{1}{a-s} = \frac{2a}{a^2 - s^2}. \end{aligned}$$

5.2. Fouriertransformation: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und *absolut integrierbar* (aib), dh $\int_{-\infty}^\infty |f(t)|\, dt < \infty$. Die *Fouriertransformierte von* f definiert man für $\omega \in \mathbb{R}$ durch

$$\mathscr{F} f(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt.$$

Das Integral konvergiert dabei für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ absolut, da $|e^{-i\omega t} f(t)| = |f(t)|$ für jedes t gilt und f absolut integrierbar ist.

Bemerkung: Die Fouriertransformation entspricht der zweiseitigen Laplacetransformation für $s = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, dh für s auf der imaginären Achse:

$$\mathscr{F} f(\omega) = \mathscr{L}_{II}\{f\}(i\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Beispiel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = e^{-a|t|}$, ist für $a > 0$ absolut integrierbar. Es gilt

$$\mathscr{F}\{e^{-a|t|}\}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Im Gegensatz zur zweiseitigen Laplacetransformation in 5.1 ist die Fouriertransformation einer absolut integrierbaren Funktion nicht unbedingt auf einem "Streifen" holomorph, ja im allgemeinen noch nicht einmal reell differenzierbar.

5.3. Rechenregeln für die Fouriertransformation: Im folgenden sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar.

(a) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt $\mathscr{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}\mathscr{F}f(\frac{\omega}{a})$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(b) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathscr{F}\{f(t-b)\}(\omega) = e^{-i\omega b}\mathscr{F}f(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $b \in \mathbb{R}$, so gilt $\mathscr{F}\{e^{itb}f(t)\}(\omega) = \mathscr{F}f(\omega - b)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

(d) Ist f stetig und (stückweise) differenzierbar derart, dass f' wieder stückweise stetig und absolut integrierbar ist, so gilt

$$\mathscr{F}\{f'\}(\omega) = i\omega\mathscr{F}f(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(e) Ist $t \mapsto tf(t)$ absolut integrierbar, so ist $\mathscr{F}f$ differenzierbar und es gilt

$$(\mathscr{F}f)'(\omega) = \mathscr{F}\{(-it)f(t)\}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Beweise von (a), (b), (c), (e) sind denen für die Laplacetranformation sehr ähnlich. Bei (d) beachte man, dass absolute Integrierbarkeit von f' Existenz der Grenzwerte $f(\pm\infty)$ impliziert, da etwa

$$f(b) - f(0) = \int_0^b f'(t)\,dt$$

für $b \to \infty$ konvergiert. Da f außerdem absolut integrierbar ist, muss $f(\pm\infty) = 0$ gelten. Für $a, b > 0$ ist dann mittels partieller Integration

$$\int_{-a}^{b} e^{-i\omega t} f'(t)\,dt = e^{-i\omega t}f(t)\Big|_{-a}^{b} + i\omega \int_{-a}^{b} e^{-i\omega t} f(t)\,dt,$$

und (d) folgt für $a, b \to \infty$. $\square$

Ende Mo 14.07.14

5.4. Beispiel: Sei $\phi(t) = e^{-t^2/2}$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt $\phi'(t) = -t\phi(t)$. Wir wenden die Fouriertransformation auf diese Gleichung an und erhalten (nach 5.3(d) und 5.3(e)):

$$i\omega\mathscr{F}\phi(\omega) = \mathscr{F}\{\phi'\}(\omega) = \mathscr{F}\{-t\phi(t)\}(\omega) = -i(\mathscr{F}\phi)'(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R},$$

also $(\mathscr{F}\phi)'(\omega) = -\omega(\mathscr{F}\phi)(\omega)$. Also löst $\mathscr{F}\phi$ dieselbe Differentialgleichung wie ϕ und es folgt

$$\mathscr{F}\phi(\omega) = \mathscr{F}\phi(0) \cdot e^{-\omega^2/2} = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2/2}, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

da $\mathscr{F}\phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$.

5.5. Riemann-Lebesgue-Lemma: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann ist die Funktion $\mathscr{F}f$ (gleichmäßig) stetig und es gilt $\mathscr{F}f(\omega) \to 0$, $|\omega| \to \infty$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wir finden $\delta > 0$ mit $|e^{-ix} - 1| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Für alle $\omega \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\mathscr{F}f(\omega+h) - \mathscr{F}f(\omega)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-i(\omega+h)t} - e^{-i\omega t})f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1||f(t)|\,dt \\ &\leq \varepsilon \underbrace{\int_{|t|\leq\delta/|h|} |f(t)|\,dt}_{\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt} + 2 \underbrace{\int_{|t|>\delta/|h|} |f(t)|\,dt}_{\to 0,\ h\to 0}. \end{aligned}$$

Also ist $\mathscr{F}f$ (gleichmäßig) stetig.

Ist f gegeben durch $f(t) = 1$, $t \in [a, b]$, und $f(t) = 0$ sonst, so gilt für $\omega \neq 0$:

$$\mathscr{F}f(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t}\,dt = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega}$$

und somit $\mathscr{F}f(\omega) \to 0$ für $|\omega| \to \infty$. Dies gilt dann auch für alle Linearkombinationen solcher Funktionen. Den Fall allgemeiner absolut integrierbarer Funktionen erhält man durch ein Approximationsargument. $\square$

5.6. Faltung und Fouriertransformation: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar und g sei beschränkt. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist dann die Funktion $\tau \mapsto f(\tau)g(t-\tau)$ stückweise stetig und absolut integrierbar und die Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

heißt *Faltung von f und g*, geschrieben $h =: f * g$. Die Funktion $f * g$ ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar und es gilt

$$\mathscr{F}(f * g)(\omega) = \mathscr{F}f(\omega) \cdot \mathscr{F}g(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Gilt zusätzlich $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, so ist $f * g(t) = 0$ für $t < 0$ und

$$f * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \quad t \geq 0.$$

Dies gibt den Zusammenhang zur Faltung aus 2.8.

Beweis. (nicht für Stetigkeit) Gilt $|g(t)| \leq M$, $t \in \mathbb{R}$, so gilt

$$|h(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||g(t-\tau)|\, d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\, d\tau,$$

und h ist beschränkt. Weiter gilt durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt &\leq \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)||g(t-\tau)|\, d\tau\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-\tau)|\, dt\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty,\end{aligned}$$

und h ist absolut integrierbar. Der Beweis für die Faltungsregel der Fouriertransformation verwendet ähnliche Argumente:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}h(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} h(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} g(t-\tau)\, dt\, d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau)\, d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t)\, dt.\end{aligned}$$

□

Beispiel: Sei $f(t) := \begin{cases} 1 & ,|t| \leq 1 \\ 0 & ,|t| > 1 \end{cases}$. Dann gilt

$h(t) := f * f(t) = \int_{-1}^{1} f(t-\tau)\, d\tau =$ Länge des Intervalls $[-1,1] \cap [t-1, t+1] = \begin{cases} 2-|t| & ,|t| \leq 2 \\ 0 & ,|t| > 2 \end{cases}$.

Außerdem ist (vgl. Beweisskizze in 5.5):

$$\mathscr{F}f(\omega) = \begin{cases} \frac{2\sin\omega}{\omega} & ,\omega \neq 0 \\ 2 & ,\omega = 0 \end{cases}.$$

Nach dem Satz ist somit $\mathscr{F}g(\omega) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2\omega}{\omega^2} & ,\omega \neq 0 \\ 4 & ,\omega = 0 \end{cases}$.

5.7. Dancing-Hat-Lemma: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig und absolut integrierbar. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f)(\xi) g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)(\mathscr{F} g)(\eta)\, d\eta.$$

Der Name kommt daher, dass man statt $\mathscr{F} f$ auch $\hat{f}$ (engl: "*hat f*") schreibt.

Beweis. Wir vertauschen die Integrationsreihenfolge

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\eta} f(\eta)\, d\eta\, g(\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi\eta} g(\xi)\, d\xi\, f(\eta)\, d\eta.$$

□

5.8. Fourierinversionsformel: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, beschränkt, absolut integrierbar und derart, dass $\mathscr{F} f$ auch absolut integrierbar ist. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \mathscr{F} f(\omega)\, d\omega.$$

Beweis. (Skizze) Es reicht, die Formel für $t = 0$ zu zeigen (verwende die Verschiebungsregel 5.3(b)). Wir setzen $h(t) = e^{-t^2/2}$ und $g(t) = h(at)$, wobei $a > 0$. Dann gilt nach 5.3(a):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f)(\omega) h(a\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\mathscr{F} g)(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{a} (\mathscr{F} h)(t/a)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) \mathscr{F} h(t)\, dt.$$

Lässt man hier a gegen Null gehen, so konvergiert die rechte Seite gegen $2\pi f(0)$ und die linke Seite konvergiert gegen $\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F} f(\omega)\, d\omega$, wovon wir uns jetzt überzeugen.
Linke Seite: Es gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathscr{F} f)(\omega) h(a\omega)\, d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}(\omega) d\omega \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} f(\omega)| |h(a\omega) - 1|\, d\omega.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ so, dass $|h(x) - 1| \leq \varepsilon$ für $|x| \leq \delta$. Für alle (anderen) $x \in \mathbb{R}$ hingegen gilt $|h(x) - 1| \leq 2$. Wir können dann weiter abschätzen (ähnlich wie im Beweis von 5.5):

$$= \int_{|\omega| \leq \delta/a} \ldots + \int_{|\omega| \geq \delta/a} \ldots \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |(\mathscr{F} f)(\omega)|\, d\omega + 2 \underbrace{\int_{|\omega| > \delta/a} |(\mathscr{F} f)(\omega)|\, d\omega}_{\longrightarrow 0,\ (h \to 0)}.$$

Rechte Seite: Zunächst gilt nach 5.4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F} h(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} e^{-t^2/2}\, dt = 2\pi.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ finden wir $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \le \varepsilon$ für $|x| \le \delta$. Da f beschränkt ist, gibt es andererseits $M > 0$ mit $|f(x) - f(0)| \le M$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir schreiben nun

$$|\int_{-\infty}^{\infty} f(at)(\mathscr{F}h)(t)\,dt - 2\pi f(0)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(at) - f(0)||(\mathscr{F}h)(t)|\,dt = \int_{|t|\le\delta/a} \ldots + \int_{|t|\ge\delta/a} \ldots$$

und können wie oben verfahren. $\square$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass man in 5.8 Stetigkeit und Beschränktheit von f nicht fordern muss. Diese Eigenschaften erhält man aus der Voraussetzung, dass $\mathscr{F}f$ absolut integrierbar ist.

Beispiele: (1) Sei $f(t) = \begin{cases} 4\frac{\sin^2 t}{t^2} & , t \neq 0 \\ 4 & , t = 0 \end{cases}$. Dann gilt $\mathscr{F}\{f\}(\omega) = \begin{cases} 2\pi(2 - |\omega|) & , |\omega| \le 2 \\ 0 & , |\omega| > 2 \end{cases}$ (wende 5.8 auf das Beispiel in 5.6 an.

(2) Es gilt $\mathscr{F}\{\frac{2}{1+t^2}\}(\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$, $\omega \in \mathbb{R}$. (Wende 5.8 auf das Beispiel in 5.2 mit $a = 1$ an).

Bemerkung (Zusammenhang von 5.8 und der komplexen Umkehrformel für die Laplacetransformation): Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und von exponentieller Ordnung $\gamma \in \mathbb{R}$. Für $c > \gamma$ ist dann $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(t) = e^{-ct} f(t)$ stückweise stetig und absolut integrierbar, und es gilt

$$\mathscr{F}g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-(c+i\omega)t} f(t)\,dt = \mathscr{L}\{f\}(c + i\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Ist nun $\mathscr{F}g$ wieder absolut integrierbar (dann ist g und damit auch f stetig), so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} (\mathscr{F}g)(\omega)\,d\omega.$$

Also ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+i\omega)t} \mathscr{L}\{f\}(c + i\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi i} \lim_{A\to\infty} \int_{\rho_A} e^{st} \mathscr{L}\{f\}(s)\,ds,$$

wobei $\rho_A : [-A, A] \to \mathbb{C}$, $\rho_A(\omega) = c + i\omega$ (beachte $\rho_A'(\omega) = i$).

5.9. Satz von Plancherel: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\omega)|^2\,d\omega.$$

Beweis. (Idee) Ist zusätzlich $\mathscr{F}f$ absolut integrierbar, so verwende man 5.7 und schreibe

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{F}f(\omega)\overline{\mathscr{F}f(\omega)}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathscr{F}\{\overline{\mathscr{F}f(\omega)}\}(t)\,dt.$$

Dann beachte man

$$\overline{\mathscr{F}f(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\overline{f(t)}\,dt = (\mathscr{F}\overline{f})(-\omega)$$

und (unter Verwendung von 5.8)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega}(\mathscr{F}\overline{f})(-\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}(\mathscr{F}\overline{f})(\omega)\,d\omega = 2\pi\overline{f(t)}.$$

Den allgemeinen Fall erhält man durch ein Approximationsargument. $\square$