Lineare Algebra

Eigenraum: $E_A(\lambda) := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$.
geometrische Vielfachheit von λ: $\dim E_A(\lambda)$.
algebraische Vielfachheit von λ: Vielfachheit von λ als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms p_A.
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch** $\Leftrightarrow A = A^T$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch (oder selbstadjungiert)** $\Leftrightarrow A = A^* = \bar{A}^T$
A ist **orthogonal** $\Leftrightarrow A^T A = I$
A ist **unitär** $\Leftrightarrow A^* A = I$
A orthogonal bzw. unitär $\Leftrightarrow$ Zeilen bzw. Spalten bilden Orthonormalbasis

Gram-Schmidt Seien $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren $b_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}$ und für $n = 2, ..., N$ $c_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, w_n\rangle b_i, b_n = \frac{c_n}{\|c_n\|}$. Dann bilden $b_1, \dots b_N$ ein Orthonormalsystem und $\operatorname{lin}\{b_1, ..., b_N\} = \operatorname{lin}\{w_1, ..., w_N\}$
Definitheit von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $A = A^T$

$$A \text{ ist } \begin{Bmatrix} \text{positiv} & \begin{bmatrix} \\ \text{semi} \end{bmatrix} & \text{definit} \\ \text{negativ} & \begin{bmatrix} \\ \text{semi} \end{bmatrix} & \text{definit} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}\colon\ \vec{x}^T A \vec{x} \begin{Bmatrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{Bmatrix} 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{EW}(A)\colon\ \lambda \begin{Bmatrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{Bmatrix} 0$$

Ansonsten ist A indefinit.
Für $n = 2$: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann A indefinit $\Leftrightarrow \det(A) < 0$.
Kriterium von Hurwitz: Ist $A = A^T = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots, n$$

Ableitungen

Richtungsableitung $f : D \to \mathbb{R}^n$ in $\vec{x}_0 \in D$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{x})$

Differenzierbarkeit: Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. f heißt <u>differenzierbar</u> in $\vec{x}_0 \in D$, falls $\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0.$$

Bezeichnung: $f'(\vec{x}_0) := A$.

Kriterium: Sind alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in $\vec{x}_0$, so ist f in $\vec{x}_0$ differenzierbar.

Gradient $f \in C^1(D, \mathbb{R}) \implies \operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$ steht senkrecht auf der <u>Niveaulinie</u> $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$.

Kettenregel $\underbrace{(g \circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in\mathbb{R}^{p\times n}} = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in\mathbb{R}^{p\times m}} \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$.

Der Satz über implizit definierte Funktionen Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Um $f(x, y) = 0$ bzgl. y zu lösen nahe bei (x_0, y_0). Bedingung: $f(x_0, y_0) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Es gilt für die Lösung $y(x)$,

$$y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}.$$

Satz für Richtungsableitung: f differenzierbar in $\vec{x}_0 \implies \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
$f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \implies \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

Matrix der Ableitung: Ist $f = (f_1, ..., f_m)$, $f_j = f_j(x_1, ..., x_n)$ dann

$$f'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\right)_{j=1 k=1}^{m \quad n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \dots & \vdots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Taylorformel $f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!}\left(\vec{h}\cdot\nabla\right)^k f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(l+1)!}\left(\vec{h}\cdot\nabla\right)^{l+1} f(\vec{\xi})$, wobei

$$(\vec{h}\cdot\nabla)^k f(\vec{x}_0) := \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k f(\vec{x}_0) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k = 1}^{n} h_{j_1} h_{j_2} \cdots h_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \cdots \partial x_{j_k}}(\vec{x}_0).$$

Optimierung

Hesse Matrix $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$

$$H_f(\vec{x}_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0)\right)_{j,k=1}^{n} = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_n x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Satz über lokale Extremstellen: Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $\vec{x}_0 \in D$ mit $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

$$H_f(\vec{x}_0) \left\{ \begin{matrix} \begin{bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{bmatrix} \text{definit} \\ \text{indefinit} \end{matrix} \right\} \implies f \text{ hat in } \vec{x}_0 \text{ ein } \left\{ \begin{matrix} \text{lokales} \begin{bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{bmatrix} \\ \text{Sattelpunkt} \end{matrix} \right\}$$

Multiplikatorenregel von Lagrange $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : h(\vec{x}) = 0\}$ und $\nabla h \neq 0$ auf S. S beschränkt & abgeschlossen $\implies$ f nimmt Max und Min auf S an. Wenn Extremum von f auf S in $\vec{x_0}$, dann gilt $\nabla f(\vec{x_0}) = \lambda \nabla h(\vec{x_0})$. Lagrangefunktional $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda h(\vec{x})$.

Integralsätze

Rotation, Divergenz $\vec{v} = (v_1 ... v_n)^T$, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$,

$$\operatorname{div} \vec{v} := \nabla \cdot \vec{v} := \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n$$

$$n = 3: \qquad \operatorname{rot} \vec{v} := \nabla \times \vec{v} := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Laplace $f(x_1, .., x_n)$ Skalarfeld: $\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \partial_j^2 f$.
Rechenregeln $f, g, \vec{v} \in C^1$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$$

$$\nabla \cdot (f\vec{v}) = f\ (\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla f) \cdot \vec{v}$$

$$\nabla \times (f\vec{v}) = f\ (\nabla \times \vec{v}) + (\nabla f) \times \vec{v} \quad (n = 3)$$

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\nabla f \cdot \nabla g + f\ \Delta g \quad (f, g \in C^2).$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}, \quad f \in C^2$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0, \quad \vec{v} \in C^2.$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f, \quad f \in C^2.$$

Kurvenintegrale von Skalarfeldern

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad \int_\gamma f\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

Bogenlänge von Raumkurven

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \quad L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|\ dt$$

Kurvenintegrale von Vektorfeldern

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \; : \quad \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

Kurvenintegral Gradientfelder:

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \; : \quad \int_\gamma \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$

Verträglichkeitsbedingung: Sei $\vec{v} = (v_1, ..., v_n)$ C^1 Vektorfeld. Dann $\vec{v}$ Potentialfeld $\implies \partial_j v_k = \partial_k v_j, \; \forall j,k = 1, ..., n$. Ist Definitionsmenge von $\vec{v}$ einfach zusammenhängend so gilt die umgekehrte Richtung.

Satz von Green/Gaußscher Integralsatz

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \left(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\right) d(x,y).$$

Wobei G 'links' von γ liegt und G einfach zusammenhängend.

Integralsatz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

$$\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o}.$$

Orientierung mit der Regel der rechten Hand.
Divergenzsatz in $\mathbb{R}^3$ ($\vec{N}$: äußerer Normaleneinheitsvektor)

$$\iiint_G \nabla \cdot \vec{v}\, d\tau = \iint_{\partial G} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do,$$

Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \{\vec{g}(u,v) \colon (u,v) \in U\}$

$$\iint_{\mathcal{F}} do = \iint_U \left|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\right| d(u,v).$$

Normaleneinheitsvektor: $(u,v) \in U$

$$\vec{N}(\vec{g}(u,v)) = \pm \frac{\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)}{\left|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\right|}$$

Oberflächenintegrale von $\mathcal{F} = \{\vec{g}(u,v) \colon (u,v) \in U\}$

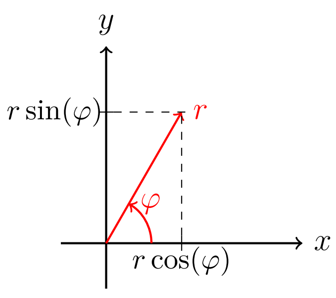
$$\iint_{\mathcal{F}} f \underbrace{do}_{do := |\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)|\, d(u,v)} := \iint_U f(\vec{g}(u,v))\, \left|\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\right| d(u,v)$$

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{w} \cdot \underbrace{d\vec{o}}_{d\vec{o} := (\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v))\, d(u,v)} := \iint_U \vec{w}(\vec{g}(u,v)) \cdot \left(\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\right) d(u,v)$$

Koordinatentransformationen

Transformationsformel $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, $\Phi : A \mapsto B$ surjektiv, injektiv auf $A/\partial A$ und $\det \Phi' \neq 0$ auf $A/\partial A$ dann $\int_A f(x)\, dx = \int_B f(\Phi(y)) |\det(\Phi'(y))|\, dy$.

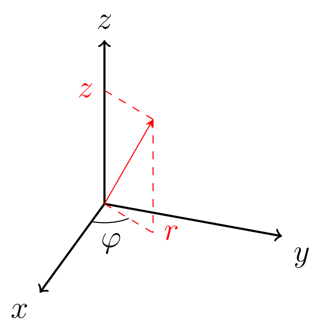
Polarkoordinaten



$$\Phi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi'(r,\varphi) = r.$$

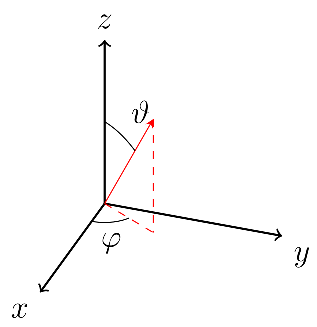
Zylinderkoordinaten



$$\Phi(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi'(r,\varphi,z) = r$$

Kugelkoordinaten



$$\Phi(r,\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det \Phi'(r,\varphi,\vartheta) = r^2 \sin\vartheta$$

Allgemeines

Arkusfunktionen:

$$\arcsin\colon [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \quad \arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi] \quad \arctan\colon \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\tan(x \pm y) = \tfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \\ \sin(2x) &= 2\sin(x)\cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ \sin^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{2} \\ \cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

partielle Integration: $\int f'g dx = fg - \int fg' dx$
Substitution: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$

$g(x)$	$\int g(x)dx$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$