Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos

Sommer 2019
17.07.2019

Übungsklausur

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Aufgabe 1 (10 + 10 Punkte)

a) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A. Bestimmen Sie eine Orthogonale Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ diagonal ist, und geben Sie $S^{-1}AS$ an. Ist A definit (positiv oder negativ) semidefinit (positiv oder negative) oder indefinit? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + 2xy - y^2$. Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion und ihre Art (lokales Minimum, lokales Maximum oder Sattelpunkt).

Aufgabe 2 (10 + 10 Punkte)

a) Mit Hilfe der Multiplikationsregel von Lagrange bestimmen Sie den größten Flächeninhalt eines Rechtecks, das in der Menge $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leqslant 4\}$ liegt und Seiten parallel zu den x,y-Achsen hat. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Zeigen Sie, dass g stetig in $(0, 0)$ ist aber nicht differenzierbar in $(0, 0)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(0, 0)$, wobei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 **(6 + 6 + 8 Punkte)**

a) Sei $\vec{w} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ mit $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+3y \\ 3x+3y \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\vec{w}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie ein zugehöriges Potential. Sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin(t)\sqrt{t}} + \frac{t}{\pi} - 1 \\ e^{\cos(t)-1} \end{pmatrix}$ Berechnen Sie $\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s}$.

b) Sei $T(t,x) = -t^3x^2 + 6x^2t^2 + 10xt + 10$ die Temperatur T als Funktion der Zeit $t \in \mathbb{R}$ und des Ortes $x \in \mathbb{R}$ auf der reellen Achse. Wenn $t = 1$, ist ein Käfer in $x = 2$ und bewegt sich nach links mit Geschwindigkeit 2. Berechnen Sie die Änderungsrate der Temperatur, die der Käfer erfährt wenn $t = 1$, mit Hilfe der Kettenregel. Erklären Sie in Worten, warum diese Rate sich unterscheidet von $T_t(1,2)$.

c) Bestimmen Sie die Summe

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-1}^0 \int_{1-\sqrt{y+1}}^1 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Aufgabe 4 **(8 + 12 Punkte)**

a) Sei $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2y+5, x^2+y^2 \leqslant 4\}$ und wir betrachten das Vektorfeld $\vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^3 e^{yz^3} \\ 0 \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds durch D, das heißt das Integral $\iint_D \vec{w} \cdot \vec{N}\, \mathrm{d}o$, wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der nach oben zeigt.

b) Die Funktion $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^3$ beschreibt die Temperatur als Funktion des Ortes. Die Wärmestromdichte wird gegeben durch $\vec{v}(x,y,z) = -\nabla T(x,y,z)$.

(i) Begründen Sie warum die Wärmestromdichte diese Form hat.

(ii) Wir betrachten den Bereich

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant 2, \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{3(x^2+y^2)}\}.$$

Verliert oder gewinnt B Wärme durch den Rand ∂B, und mit welcher Rate? Begründen Sie Ihre Antwort.