Höhere Mathematik II für Elektrotechnik

Hauptklausur

Aufgabe 1 (7 + 6 + 4 + 3 = 20 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

(b) Geben Sie alle zugehörigen Eigenvektoren an.

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie in diesem Falle eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $A = SDS^{-1}$.

(d) Gegeben sei eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit dem charakteristischen Polynom $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, $\lambda \in \mathbb{C}$, und $\dim(E_B(1)) = 1$. Wie viele potenzielle Möglichkeiten für die Jordan-Matrix J der Matrix B gibt es und wie sehen diese aus?

Aufgabe 2 ((6 + 4) + 10 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und ein Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, sowie die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \frac{1}{2}\langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle - \left\langle \vec{b}, \vec{x}\right\rangle = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{x}^T\vec{b}.$$

(a1) Zeigen Sie, dass die Funktion F zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist und berechnen Sie den Gradienten wie auch die Hesse-Matrix von F auf $\mathbb{R}^n$.

(a2) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz für $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$A\vec{x}_0 = \vec{b} \ \Leftrightarrow\ F \text{ hat in } \vec{x}_0 \text{ ein globales Minimum.}$$

(b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + x \cdot y.$$

Begründen Sie, dass die Funktion f auf der Menge

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + 2y^2 \le 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3 (9 + 8 + 3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Gleichung

$$(*) \quad z^3 + z + xy = 1 \;\text{ mit } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass für $(x, y) = (1, 1)$ hat $(*)$ eine eindeutige reelle Lösung $z_0 \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie diese. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizit-definierte Funktionen, dass es eine stetig-differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ gibt mit $U \subseteq \mathbb{R}^2, V \subseteq \mathbb{R}$ offen und $(1, 1) \in U$, $z_0 \in V$ so, dass die Äquivalenz gilt:

$$(x, y, z) \in U \times V \text{ löst die Gleichung } (*) \;\Leftrightarrow\; g(x, y) = z.$$

Berechnen Sie $g'(1, 1)$.

(b) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von der Funktion

$$f\colon\ (0, \infty)^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^y$$

um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(c) Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \\ z\mathrm{e}^x \\ xy\ln(z) \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist und falls ja, berechnen Sie ein Potenzial φ von $\vec{v}$.

Aufgabe 4 (8 + 8 + 4 = 20 Punkte)

(a) Seien

$$B := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \|(x, y, z)\| < 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$, $R > 1$ und

$$A_R := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \|(x, y, z)\| < R\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\iiint\limits_{A_R} \|(x, y, z)\|^{-4} \,\mathrm{d}(x, y, z).$$

(b) Gegeben sei die Menge

$$Q := \{(x, y) : x \in [0, \pi],\ y \in [0, x]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und die Funktion

$$\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x - y)\cos^2(x) \\ \sin^{10}(y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe vom Integralsatz von Gauß das Integral $\oint\limits_{\partial Q} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

(c) Gegeben sei der Rand

$$\partial G := \{(\cos(t), \sin(t), \cos(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$$

eines regulären Flächenstücks $G \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion

$$\vec{u}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 - 2y \\ 2xyz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral $\oint\limits_{\partial G} \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Viel Erfolg!