01.08.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann

Höhere Mathematik II für Elektrotechnik

Lösungsvorschläge zur Hauptklausur

Aufgabe 1 (7 + 6 + 4 + 3 = 20 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix A.

(b) Geben Sie alle zugehörigen Eigenvektoren an.

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie in diesem Falle eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $A = SDS^{-1}$.

(d) Gegeben sei eine reguläre Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit dem charakteristischen Polynom $p_B(\lambda) = (\lambda - 1)^3$, $\lambda \in \mathbb{C}$, und $\dim(E_B(1)) = 1$. Wie viele potenzielle Möglichkeiten für die Jordan-Matrix J der Matrix B gibt es und wie sehen diese aus?

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** Das charakteristische Polynom p_A aufstellen
Es gilt für das charakteristische Polynom p_A für alle $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(-\lambda) + 0\cdot(-1)\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot(-\lambda)\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)\cdot(-\lambda) - (-\lambda)\cdot 1\cdot 0 \\ &= -\lambda^3 + 0 - 1 + \lambda + \lambda - 0 = -\left(\lambda^3 - 2\lambda + 1\right) = -(\lambda - 1)\cdot\left(\lambda^2 + \lambda - 1\right) \\ &= -(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

nach der Regel von Sarrus, da laut der Mitternachtsformel gilt:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \;&\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \\ &\Leftrightarrow\; \lambda \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Schritt 2. Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aufstellen
Es gilt nun für $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist ein Eigenwert der Matrix } A \;&\Leftrightarrow\; p_A(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; -(\lambda - 1)\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \lambda \in \left\{1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Also besitzt die Matrix A genau drei paarweise verschiedene einfache (d.h. die algebraische Vielfachheit ist eins) Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und } \lambda_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(b) **Schritt 3.** Eigenräume bestimmen

<u>Fall 1.</u> $\lambda = 1$: Es gilt

$$E_A(1) = \ker(A - 1 \cdot I_3) = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \mid \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \quad + \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

<u>Fall 2.</u> $\lambda = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: Es gilt

$$E_A\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \ker\left(A - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot I_3\right) = \ker\left(A + \frac{1+\sqrt{5}}{2} I_3\right)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{2}{1+\sqrt{5}} \quad \cdot 1 \\ + \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

da nach der dritten binomischen Formel

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

gilt.

<u>Fall 3.</u> $\lambda = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$: Es gilt

$$E_A\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \ker\left(A - \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot I_3\right) = \ker\left(A + \frac{1-\sqrt{5}}{2} I_3\right)$$

$$= \ker \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ 1 & -1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{2}{1-\sqrt{5}} \quad \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \\ + \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{2}{1-\sqrt{5}} \quad \cdot 1 \\ + \end{matrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

da nach der dritten binomischen Formel

$$\frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{1-5} = \frac{2\left(1+\sqrt{5}\right)}{-4} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

gilt.

Schritt 4. Die Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aufstellen

Also haben wir nun gezeigt, dass

$$\lambda_1 = 1 \text{ ein Eigenwert ist mit Eigenvektor } \vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ein Eigenwert ist mit Eigenvektor } \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ ein Eigenwert ist mit Eigenvektor } \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) **Schritt 5.** Diagonalisierbarkeit von A?
Die Matrix A ist diagonalsierbar, da es sich hierbei um eine 3×3-Matrix handelt und die Matrix A drei paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt.
Schritt 6. Aufstellen der Matrizen D und S
Die Diagonalmatrix D ist gegeben über die Eigenwerte, genauer:

$$D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \operatorname{diag}\left(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Die Matrix S ist gegeben über die Eigenvektoren, genauer:

$$S := \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Nun gilt:

$$A = SDS^{-1}.$$

□

(d) Wegen

$$p_B(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\Leftrightarrow\; (\lambda-1)^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$$

hat die Matrix B genau einen dreifachen Eigenwert $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, d.h. die algebraische Vielfachheit k vom Eigenwert $\lambda = 1$ ist drei. Für die geometrische Vielfachheit m des Eigenwertes $\lambda = 1$ erhalten wir nun aber

$$m := \dim(E_B(1)) = 1 \neq 3 = k.$$

Damit stimmen die algebraische und die geometrische Vielfachheit nicht überein, damit ist die Matrix B nicht diagonalisierbar. Allerdings ist per Voraussetzung die Matrix B regulär und so existiert nach der Vorlesung eine Jordan-Normalform. Dabei gibt die geometrische Vielfachheit $m = 1$ hier an, wie viele Jordan-Blöcke es in der Jordan-Matrix J geben wird, demnach existiert hier nur ein Jordanblock zum Eigenwert $\lambda = 1$. Da die Matrix B auch nur einen Eigenwert besitzt, ist somit die Jordanmatrix schon eindeutig gegeben. Die Jordanmatrix lautet also:

$$J := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

□

Aufgabe 2 $\quad ((6+4)+10=20$ Punkte)

(a) Gegeben sei eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und ein Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, sowie die Funktion

$$F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \vec{x} \mapsto \frac{1}{2}\langle A\vec{x}, \vec{x}\rangle - \left\langle \vec{b}, \vec{x}\right\rangle = \frac{1}{2}\vec{x}^T A\vec{x} - \vec{x}^T\vec{b}.$$

(a1) Zeigen Sie, dass die Funktion F zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ ist und berechnen Sie den Gradienten wie auch die Hesse-Matrix von F auf $\mathbb{R}^n$.

(a2) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz für $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$A\vec{x}_0 = \vec{b} \ \Leftrightarrow \ F \text{ hat in } \vec{x}_0 \text{ ein globales Minimum.}$$

(b) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x + x \cdot y.$$

Begründen Sie, dass die Funktion f auf der Menge

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 2x^2 + 2y^2 \leq 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Setze $A =: (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ und $\vec{b} =: (b_1, \ldots, b_n)$.
(a1) Seien $C := (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $\vec{v} := (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Weiter gilt für alle Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und für alle Indizes $l, k \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\vec{x}^T\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = \sum_{i=1}^n x_iv_i = x_kv_k + \sum_{i=1, i\neq k}^n x_iv_i,$$

$$(C\vec{x})_l = \sum_{i=1}^n c_{li}x_i = c_{lk}x_k + \sum_{i=1, i\neq k} c_{li}x_i$$

bzw.

$$C\vec{x} = \begin{pmatrix} c_{1k}x_k + \sum\limits_{i=1,i\neq k} c_{1i}x_i \\ \vdots \\ c_{nk}x_k + \sum\limits_{i=1,i\neq k} c_{ni}x_i \end{pmatrix}.$$

Damit folgt für die partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto \vec{x}^T\vec{v}\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial\left[(x_1,\ldots,x_n) \mapsto x_kv_k + \sum\limits_{i=1,i\neq k}^n x_iv_i\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = v_k,$$

$$\frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto (C\vec{x})_l\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{\partial\left[(x_1,\ldots,x_n) \mapsto c_{lk}x_k + \sum\limits_{i=1,i\neq k} c_{li}x_i\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = c_{lk},$$

$$\frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto \vec{v}\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n,$$

bzw.

$$\frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto C\vec{x}\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = \vec{c}_k := \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}$$

für alle Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und allen Indizes $l, k \in \{1, \ldots, n\}$. Damit erhalten wir für alle Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und für jeden Index $k \in \{1, \ldots, n\}$ nach der Summen- und Produktregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{x}) &= \frac{1}{2}\frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto \vec{x}^T A\vec{x}\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) - \frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto \vec{x}^T \vec{b}\right]}{\partial x_k}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left((A\vec{x})_k + \vec{x}^T \frac{\partial\left[\vec{x} \mapsto A\vec{x}\right]}{\partial x_k}(\vec{x})\right) - b_k \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i + \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk}\end{pmatrix}\right) - b_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n a_{ki}x_i + \sum_{i=1}^n a_{ik}x_i\right) - b_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (a_{ki} + a_{ik})\, x_i - b_k = \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i - b_k,\end{aligned}$$

da die Matrix A insbesondere symmetrisch ist (A ist positiv definit und dies impliziert bei uns symmetrisch). Insbesondere folgt nun für den Gradienten von F:

$$\operatorname{grad} F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i - b_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i - b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix} = A\vec{x} - \vec{b}$$

für alle Vektoren $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Und weiter erhalten wir so für die Hesse-Matrix der Funktion F:

$$H_F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \ldots & \vec{a}_n\end{pmatrix} = A.$$

Damit sehen wir, dass alle einfachen und zweifachen partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^n$ existieren und dort stetig sind, dies liefert uns nun, dass die Funktion F zweimal stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^n$, bzw. dass $F \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ist. □

(a2) Aus der positiven Definitheit der Matrix A folgt nun:

- Die Matrix A ist regulär und daher existiert ein eindeutiger Vektor $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $A\vec{x}_0 = \vec{b}$.
- Die Hesse-Matrix $H_F(\vec{x}) = A$ der Funktion F ist für alle Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ positiv definit, d.h. alle kritischen Punkte der Funktion F sind lokale Minima.

Wir haben nun die Äquivalenz:

$$A\vec{x}_0 = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; A\vec{x}_0 - \vec{b} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \nabla F(\vec{x}_0) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; F \text{ hat in } \vec{x}_0 \text{ einen kritischen Punkt } \;\Leftrightarrow\; F \text{ hat in } \vec{x}_0 \text{ ein lokales Minimum.}$$

Auf Grund der Eindeutigkeit von $\vec{x}_0$ existiert nur ein einziges Extremum von der Funktion F auf ganz $\mathbb{R}^n$, daher muss dieses schon global sein, d.h.

$$A\vec{x}_0 = \vec{b} \;\Leftrightarrow\; F \text{ hat in } \vec{x}_0 \text{ einen globales Minimum.}$$

□

(b) Wir nutzen im folgenden die Funktion f auf dem gesamten Raum $\mathbb{R}^2$ statt nur auf K.

Schritt 1. Untersuchen der Funktion f im Inneren von K

Die Funktion f ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ wieder stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 1 + y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter gilt:

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 1 + y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; [x = 0 \text{ und } y = -1].$$

Allerdings ist der Punkt $(x, y) = (0, -1) \notin K$, denn es gilt:

$$2 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 + 2 = 2 > 1,$$

daher besitzt die Funktion f keine lokalen Extrema im inneren der Menge K bzw. genauer auf der Menge

$$\dot{K} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + 2y^2 < 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Schritt 2. Begründung der Existenz von Minimum und Maximum von der Funktion f auf der Menge K
Da die Funktion f allerdings insbesondere stetig ist und die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen) ist, folgt, dass auch das Bild $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist und demnach nimmt die Funktion f auf der Menge K Minimum und Maximum an. Da diese allerdings nicht im Inneren liegen können, müssen Minimum und Maximum auf dem Rand von K zu finden sein, d.h. auf der Menge

$$\partial K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2x^2 + 2y^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Schritt 3. Ansatz für den Satz über Lagrange-Multiplikatoren aufstellen
Setze als die Hilfsfunktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto 2x^2 + 2y^2 - 1.$$

Die Funktion h ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ wieder stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 4x,$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 4y$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Weiter setzen wir das Lagrange-Funktional F als

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,\lambda) \mapsto f(x,y) + \lambda h(x,y) = x + xy + \lambda\left(2x^2 + 2y^2 - 1\right).$$

Die Funktion F ist folglich stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ insbesondere mit der partiellen Ableitung:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 2x^2 + 2y^2 - 1$$

für alle $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$. Nun gilt für den Gradienten von F:

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \nabla f(x,y) + \nabla h(x,y) + \left(2x^2 + 2y^2 - 1\right)\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 + y + 4x\lambda \\ x + 4y\lambda \\ 2x^2 + 2y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$.
Schritt 4. Den Gradienten von der Funktion F null setzen
Es gilt:

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 1 + y + 4x\lambda \\ x + 4y\lambda \\ 2x^2 + 2y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert uns nun durch Multiplizieren mit x bzw. mit y der ersten bzw. der zweiten Gleichung:

$$y + y^2 + 4xy\lambda = y(1 + y + 4x\lambda) = y \cdot 0 = 0 = x \cdot 0 = x(x + 4y\lambda) = x^2 + 4xy\lambda,$$

dies liefert nun:

$$y^2 + y = y + y^2 = x^2.$$

Einsetzen in die dritte Gleichung liefert uns:

$$0 = 2x^2 + 2y^2 - 1 = 2\left(y^2 + y\right) + 2y^2 - 1 = 2y^2 + 2y + 2y^2 - 1 = 4y^2 + 2y - 1.$$

Die Mitternachtsformel ergibt:

$$y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in $x^2 = y^2 + y$ ein, erhalten wir laut erster bzw. zweiter binomischer Formel

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\right)^2 + \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} = \frac{(-1)^2 \pm 2 \cdot (-1) \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}^2}{4^2} + \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} = \frac{1 \mp 2\sqrt{5} + 5}{16} + \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{6 \mp 2\sqrt{5} - 4 \pm 4\sqrt{5}}{16} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{16} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{8}. \end{aligned}$$

Aus $x^2 \geq 0$ folgt nun wegen $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2 > 1$, dass

$$y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ und } x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{8}$$

ist, bzw.

$$x = \pm \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \text{ und } y = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Die Funktion f ausgewertet an diesen Stellen ergibt:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4} < 0, \\ f\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) &= \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0. \end{aligned}$$

Schritt 5. Die Rangbedingung an h überprüfen
Es gilt für den Rang der Ableitung von h:

$$\operatorname{rang}\left(h'\left(x,y\right)\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 4x & 4y \end{pmatrix} \ \mid \cdot \tfrac{1}{4} \ = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \in \{0,1\}$$

mit

$$\operatorname{rang}\left(h'\left(x,y\right)\right) = 0 + \Leftrightarrow \ \left(x,y\right) = \left(0,0\right).$$

Da der Punkt $(x,y) = (0,0) \notin \partial K$ ist wegen

$$2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \neq 1$$

folgt, dass die Matrix h' auf ∂K stets vollen Rang hat, insbesondere in den beiden Punkten

$$\left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) \text{ und } \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right).$$

Schritt 6. Das Minimum und Maximum von f auf K aufstellen
Zusammengefasst lautet wegen

$$f\left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) < 0 < f\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right),$$

dass das Minimum und das Maximum der Funktion f auf der Menge K gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \min_{(x,y)\in K} f\left(x,y\right) &= f\left(-\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ \max_{(x,y)\in K} f\left(x,y\right) &= f\left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 3 (9 + 8 + 3 Punkte)

(a) Gegeben ist die Gleichung

$$(*) \quad z^3 + z + xy = 1 \ \text{ mit } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass für $(x, y) = (1, 1)$ hat $(*)$ eine eindeutige reelle Lösung $z_0 \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie diese. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizit-definierte Funktionen, dass es eine stetig-differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ gibt mit $U \subseteq \mathbb{R}^2, V \subseteq \mathbb{R}$ offen und $(1, 1) \in U$, $z_0 \in V$ so, dass die Äquivalenz gilt:

$$(x, y, z) \in U \times V \text{ löst die Gleichung } (*) \ \Leftrightarrow \ g(x, y) = z.$$

Berechnen Sie $g'(1, 1)$.

(b) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom von der Funktion

$$f\colon (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto x^y$$

um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(c) Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^3, \ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \\ z e^x \\ xy \ln(z) \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist und falls ja, berechnen Sie ein Potenzial φ von $\vec{v}$.

Lösung von Aufgabe 3

(a) Wir setzen die Funktion f als

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \ (x, y, z) \mapsto z^3 + z + xy - 1$$

und den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(x, y, z) \text{ löst die Gleichung } (*) \ \Leftrightarrow \ f(x, y, z) = 0.$$

Weiter gilt:

$$0 = f(1, 1, z) \ \Leftrightarrow \ 0 = z^3 + z + 1 \cdot 1 - 1 \ \Leftrightarrow \ 0 = z\left(z^2 + 1\right) + 1 - 1 \ \Leftrightarrow \ 0 = z\left(z^2 + 1\right) \ \Leftrightarrow \ z = 0.$$

Damit ist der gesuchte Punkt $z_0 = 0$ und dies ist die eindeutige reelle Lösung von $(*)$, falls $(x, y) = (1, 1)$ ist. Weiter ist die Funktion f als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ erneut stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= x, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 3z^2 + 1 \end{aligned}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Außerdem gilt für die Auswertung in $(x, y, z) = (1, 1, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 0) = 1, \ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 0) = 1 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 0) = 3 \cdot 0^2 + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizit-definierte Funktionen existieren nun offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $(1, 1) \in U$ und $0 \in V$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to V$ so, dass für alle Punkte $(x, y, z) \in U \times V$ die Äquivalenz gilt:

$$(x, y, z) \text{ löst die Gleichung } (*) \ \Leftrightarrow \ (x, y, z) \text{ löst die Gleichung } f(x, y, z) = 0 \ \Leftrightarrow \ g(x, y) = z.$$

Weiter liefert uns der Satz über implizit-definierte Funktionen, dass

$$g'(x, y) = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \end{pmatrix}$$

gilt für alle $(x,y) \in U$. Insbesondere ist $(1,1) \in U$ mit $g(1,1) = 0$ und

$$\begin{aligned} g'(1,1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,g(1,1))\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,g(1,1)) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,g(1,1)) \end{pmatrix} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,0)\right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,0) \end{pmatrix} \\ &= -(1)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

(b) Es gilt nach den Logarithmus- (bzw. Exponential-)gesetzen:

$$f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty)^2$. Die Funktion f ist als Komposition zweimal stetig differenzierbarer Funktionen auf $(0,\infty)^2$ erneut zweimal stetig differenzierbar auf $(0,\infty)^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \mathrm{e}^{y\ln(x)} \cdot \frac{y}{x} = yx^{-1}x^y = yx^{y-1} = y\mathrm{e}^{(y-1)\ln(x)}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \mathrm{e}^{y\ln(x)} \cdot \ln(x) = \ln(x)x^y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y\mathrm{e}^{(y-1)\ln(x)} \cdot \frac{y-1}{x} = y(y-1)x^{-1}x^{y-1} = y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)} \cdot \ln(x) = \ln^2(x)x^y, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{1}{x} \cdot \mathrm{e}^{y\ln(x)} + \ln(x)\mathrm{e}^{y\ln(x)} \cdot \frac{y}{x} = x^{-1}x^y + \ln(x)yx^{-1}x^y = x^{y-1} + \ln(x)yx^{y-1} = (1+y\ln(x))\,x^{y-1} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty)^2$. Laut dem Satz von Schwarz gilt zudem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (1+y\ln(x))\,x^{y-1}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty)^2$. Damit lautet die Ableitung bzw. die Hesse-Matrix von f:

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx^{y-1} & \ln(x)x^y \end{pmatrix}, \\ H_f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & (1+y\ln(x))\,x^{y-1} \\ (1+y\ln(x))\,x^{y-1} & \ln^2(x)x^y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty)^2$. Wir werten nun alles im Punkt $(x,y) = (1,1)$ aus:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1^1 = 1, \\ f'(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1^{1-1} & \ln(1) \cdot 1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^0 & 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_f(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (1-1) \cdot 1^{1-2} & (1+1\cdot\ln(1)) \cdot 1^{1-1} \\ (1+1\cdot\ln(1)) \cdot 1^{1-1} & \ln^2(1) \cdot 1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1^{-1} & (1+0) \cdot 1^0 \\ (1+0) \cdot 1^0 & 0^2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das zweite Taylorpolynom um den Punkt $(x_0,y_0) = (1,1) \in (0,\infty)^2$ lautet dann:

$$\begin{aligned} T_f((x,y),(1,1)) &= \frac{1}{0!}f(1,1) + \frac{1}{1!}f'(1,1)\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \frac{1}{2!}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^T H_f(1,1)\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{1} \cdot 1 + \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2 \cdot 1}\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + [1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1)] + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) \\ 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-1) \end{pmatrix} \\ &= 1 + x - 1 + 0 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0+y-1 \\ x-1+0 \end{pmatrix} = x + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \\ &= x + \frac{1}{2}[(x-1)(y-1) + (y-1)(x-1)] = x + (x-1)(y-1) = x + [xy - x - y + 1] = 1 - y + xy \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in (0,\infty)^2$. □

(c) Das Vektorfeld $\vec{v}$ ist kein Potenzialfeld, denn sonst, gebe es eine stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

mit $\nabla\varphi = \vec{v}$ und dies würde folgendes implizieren:

$$\varphi(x,y,z) = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z)\,\mathrm{d}x = \int x^2 y \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 y + C(y,z)$$

mit einer Funktion $C\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$, welche nur von y und z abhängt. Daraus erhalten wir nun aber den Widerspruch, denn es folgt:

$$z\mathrm{e}^x = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = z\mathrm{e}^x - \frac{1}{3}x^3,$$

womit die rechte Seite unteranderem auch von der Variable x abhängt. Demnach kann so ein Potential φ nicht existieren.

$\square$

Aufgabe 4 (8 + 8 + 4 = 20 Punkte)

(a) Seien $R > 1$ und

$$A_R := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < \|(x, y, z)\| < R\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie das Integral

$$\iiint\limits_{A_R} \|(x, y, z)\|^{-4} \,\mathrm{d}\,(x, y, z)\,.$$

(b) Gegeben sei die Menge

$$Q := \{(x, y) : x \in [0, \pi]\,,\ y \in [0, x]\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

und die Funktion

$$\vec{F} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x - y)\cos^2(x) \\ \sin^{10}(y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe vom Integralsatz von Gauß das Integral $\oint\limits_{\partial Q} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

(c) Gegeben sei der Rand

$$\partial G := \{(\cos(t), \sin(t), \cos(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$$

eines regulären Flächenstücks $G \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Funktion

$$\vec{u} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz^2 - 2y \\ 2xyz \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Integral $\oint\limits_{\partial G} \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$.

Lösung von Aufgabe 4

(a) Setze die Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Nutzen wir nun Kugelkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

für $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ mit $\det(\Phi'(r, \varphi, \theta)) = r^2\sin(\theta)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(\Phi(r, \varphi, \theta)) &= \sqrt{r^2\cos^2(\varphi)\sin^2(\theta) + r^2\sin^2(\varphi)\sin^2(\theta) + r^2\cos^2(\theta)} = \sqrt{r^2\left(\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)} \\ &= |r|\sqrt{1 \cdot \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = r\sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = r\sqrt{1} = r \cdot 1 = r \end{aligned}$$

für alle $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ nach dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Damit lässt sich nun die Menge A_R wie folgt parametrisieren:

$$\begin{aligned} A_R &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < \|(x, y, z)\| < R\right\} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < f(x, y, z) < R\right\} \\ &= \{\Phi(r, \varphi, \theta) : 1 < f(\Phi(r, \varphi, \theta)) < R,\ r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi]\,,\ \theta \in [0, \pi]\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} : 1 < r < R,\ r > 0,\ \varphi \in [0, 2\pi]\,,\ \theta \in [0, \pi]\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix} : r \in (1, R)\,,\ \varphi \in [0, 2\pi]\,,\ \theta \in [0, \pi]\right\}. \end{aligned}$$

Damit folgt für das Integral per Vorlesung und per Transformationssatz:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{A_R} \|(x,y,z)\|^{-4} \,\mathrm{d}(x,y,z) &= \iiint\limits_{A_R} f(x,y,z)^{-4} \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_1^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\Phi(r,\varphi,\theta))^{-4} \cdot \det(\Phi'(r,\varphi,\theta)) \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \\
&= \int_1^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^{-4} \cdot r^2 \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_1^R r^{-2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_1^R r^{-2} \int_0^{2\pi} [-\cos(\theta)]_0^{\pi} \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \\
&= (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) \int_1^R r^{-2} \int_0^{2\pi} 1 \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = (-(-1)+1) \int_1^R r^{-2} [\varphi]_0^{2\pi} \,\mathrm{d}r \\
&= (1+1)(2\pi - 0) \int_1^R r^{-2} \mathrm{d}r = 2 \cdot 2\pi \left[-\frac{1}{r}\right]_1^R = 4\pi \left(-\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right) = 4\pi \left(1 - \frac{1}{R}\right).
\end{aligned}$$

□

(b) Das Vektorfeld $\vec{F}$ ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ erneut stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit folgenden partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) &= -\cos(x-y)\cos^2(x), \\
\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) &= 0
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Integralsatz von Gauß gilt nun:

$$\begin{aligned}
\oint\limits_{\partial Q} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} &= \iint\limits_{Q} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}(x,y) = \iint\limits_{Q} \left(0 - \left(-\cos(x-y)\cos^2(x)\right)\right) \mathrm{d}(x,y) \\
&= \iint\limits_{Q} \cos(x-y)\cos^2(x) \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{\pi} \int_0^{x} \cos(x-y)\cos^2(x) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos^2(x) \int_0^{x} \cos(x-y) \,\mathrm{d}y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} \cos^2(x) [-\sin(x-y)]_0^x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (-\sin(x-x) - (-\sin(x-0)))\cos^2(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi} (-\sin(0) + \sin(x))\cos^2(x) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} (-0 + \sin(x))\cos^2(x) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(x)\cos^2(x) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\cos^3(x)\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{3}\left(\cos^3(\pi) - \cos^3(0)\right) = -\frac{1}{3}\left((-1)^3 - 1^3\right) = -\frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{1}{3} \cdot (-2) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

□

(c) Das Vektorfeld $\vec{u}$ ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktion auf $\mathbb{R}^3$ erneut stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y,z) &= z^2, \\
\frac{\partial u_1}{\partial z}(x,y,z) &= 2yz, \\
\frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y,z) &= z^2, \\
\frac{\partial u_2}{\partial z}(x,y,z) &= 2xz, \\
\frac{\partial u_3}{\partial x}(x,y,z) &= 2yz, \\
\frac{\partial u_3}{\partial y}(x,y,z) &= 2xz
\end{aligned}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Damit folgt für die Rotation vom Vektorfeld $\vec{u}$:

$$\operatorname{rot}(\vec{u})(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial u_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial u_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial u_3}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz - 2xz \\ 2yz - 2yz \\ z^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Nun folgt nach dem Integralsatz von Stokes:

$$\oint\limits_{\partial G} \vec{u} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{G} \operatorname{rot}(\vec{u}) \cdot \mathrm{d}\vec{o} = \iint\limits_{G} \vec{0} \cdot \mathrm{d}\vec{o} = 0.$$

$\square$