Lineare Algebra

Eigenwerte, Eigenräume & Vielfachheiten	Eigenschaften von Matrizen
$\lambda \in \mathbb{C}$ **Eigenwert** von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$	$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **symmetrisch** $\Leftrightarrow A = A^T$.
$:\Leftrightarrow\ \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\} : A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.	$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **hermitesch/ selbstadjungiert**
Eigenraum: $E_A(\lambda) := \{\vec{x} \in \mathbb{C}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}$.	$:\Leftrightarrow A = A^* = \overline{A}^T$.
Geometrische Vielfachheit von λ: $\dim(E_A(\lambda))$.	$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **orthogonal** $:\Leftrightarrow A^TA = AA^T = I_n$.
Algebraische Vielfachheit von λ:	$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ **unitär** $:\Leftrightarrow A^*A = AA^* = I_n$.
Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen	A orthogonal/ unitär
Polynoms $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.	$\Leftrightarrow$ Zeilen bilden Orthonormalbasis.

Gram-Schmidt Verfahren: Seien $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{R}^m$ linear unabhängige Vektoren. Wir definieren $b_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|} \in \mathbb{R}^m$ und für $n = 2, \ldots, N$

$$c_n = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle b_i, w_n \rangle b_i \text{ und } b_n = \frac{c_n}{\|c_n\|}.$$

Dann bilden $b_1, \ldots, b_N$ ein Orthonormalsystem und $\operatorname{lin}\{b_1, \ldots, b_N\} = \operatorname{lin}\{w_1, \ldots, w_N\}$.
Definitheit von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^T$:

$$A \text{ ist} \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{positiv semi-} \\ \text{negativ} \\ \text{negativ semi-} \end{Bmatrix} \text{definit} :\Leftrightarrow \text{ Für alle Vektoren } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} :\ \vec{x}^T A\vec{x} = \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \begin{Bmatrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{Bmatrix} 0$$

$$\Leftrightarrow \text{ Für alle Eigenwerte } \lambda \in \mathbb{C} \text{ von } A\text{: } \lambda \begin{Bmatrix} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{Bmatrix} 0$$

Ansonsten ist die Matrix A indefinit.
Im Fall $n = 2$: Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch. Dann ist die Matrix A indefinit $\Leftrightarrow \det(A) < 0$.
Kriterium von Hurwitz: Ist $A = (a_{jk})_{j,k=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = A^T$, dann gilt:

$$A \text{ ist positiv definit } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \text{ für alle } m = 1, 2, \ldots, n,$$

$$A \text{ ist negativ definit } \Leftrightarrow (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0 \text{ für alle } m = 1, 2, \ldots, n,$$

Cramersche Regel - Fall $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ regulär $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a\cdot d - b\cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ableitungen

Definition	Sätze & Rechenregeln
Richtungsableitung: $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ in $\vec{x}_0 \in D$ nach $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$:⇔ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}_0+t\vec{v})-f(\vec{x}_0)}{t}$.	**Kettenregel**: $\underbrace{(g\circ f)'(\vec{x}_0)}_{\in\mathbb{R}^{p\times n}} = \underbrace{g'(f(\vec{x}_0))}_{\in\mathbb{R}^{p\times m}} \cdot \underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$.
Partielle Ableitung: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(\vec{x}_0)$.	**Summenregel**: $(f+g)'(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0) + g'(\vec{x}_0)$.
Differenzierbarkeit: $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. f differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$:⇔ $\exists A \in \mathbb{R}^{m\times n}\colon \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{\Vert f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)-A(\vec{x}-\vec{x}_0)\Vert}{\Vert \vec{x}-\vec{x}_0\Vert} = 0$. In diesem Fall: $f'(\vec{x}_0) := A$.	**Hinreichendes Db-Kriterium**: $\forall k \in \{1,\dots,n\} : \frac{\partial f_j}{\partial x_k}$ stetig in $\vec{x}_0$ $\Rightarrow$ f stetig differenzierbar in $\vec{x}_0$.
Gradient: Für $f\colon D\to\mathbb{R}$ partiell differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$: $\operatorname{grad}(f)(\vec{x}_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)\right)^T$.	**Satz für Richtungsableitung**: f differenzierbar in $\vec{x}_0$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = f'(\vec{x}_0)\,\vec{v}\ \forall \vec{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$.
Nabla-Operator: $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$.	**Satz zum Gradienten**: $f \in C^1(D,\mathbb{R})$, dann: $\operatorname{grad}(f)(\vec{x}_0)$ ist orthogonal zur Niveaulinie $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n\colon f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)\}$.

Lokaler Umkehrsatz: $\forall D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D,\mathbb{R}^n)$, $\vec{x}_0 \in D$ mit $f'(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär:
$\exists U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $\vec{x}_0 \in U \subseteq D, \vec{y}_0 := f(\vec{x}_0) \in V\colon f\colon U \to V$ bijektiv
mit $f^{-1}\colon V \to U$ stetig differenzierbar mit $\left(f^{-1}\right)'(\vec{y}) = \left(f'\left(f^{-1}(\vec{y})\right)\right)^{-1}$ für alle $\vec{y}\in V$.
Matrix der Ableitung: Ist $f = (f_1,\dots,f_m) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $\vec{x}_0 \in D$, dann ist

$$f'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\vec{x}_0)\right)_{\substack{j=1,\dots,m\\k=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Satz über implizit-definierte Funktionen:
Gegeben: $n,m\in\mathbb{N}$ mit $n>m$, $p := n-m$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $f = (f_1,\dots,f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit

$$f'(\vec{x},\vec{y}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(\vec{x},\vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(\vec{x},\vec{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p}(\vec{x},\vec{y}) & \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(\vec{x},\vec{y}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(\vec{x},\vec{y}) \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x},\vec{y}) & \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x},\vec{y}) \end{array}\right),$$

$(\vec{x},\vec{y}) := (x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_m)$.
Aussage: $\forall (\vec{x}_0,\vec{y}_0) \in D$ mit $f(\vec{x}_0,\vec{y}) = \vec{0}$, $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ regulär: $\exists U \subseteq \mathbb{R}^p, V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen mit $\vec{x}_0 \in U, \vec{y}_0 \in V, U\times V \in D$
$\exists g\colon U \to V$ stetig differenzierbar so, dass $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}$ regulär auf V,

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{y} = g(\vec{x}),$$

und

$$g'(\vec{x}) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x},g(\vec{x}))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x},g(\vec{x}))\ \ \forall \vec{x}\in U.$$

Taylorformel: $f\left(\vec{x}_0+\vec{h}\right) = \sum\limits_{k=0}^{l} \frac{1}{k!}\left(\vec{h}\cdot\nabla\right)^k f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(l+1)!}\left(\vec{h}\cdot\nabla\right)^{l+1} f\left(\vec{\xi}\right)$, wobei

$$\left(\vec{h}\cdot\nabla\right)^k f(\vec{x}_0) := \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^k f(\vec{x}_0) = \sum_{j_1,j_2,\dots,j_k=1}^n h_{j_1} h_{j_2}\cdot\ldots\cdot h_{j_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\cdot\ldots\cdot\partial x_{j_k}}(\vec{x}_0).$$

Optimierung

Hesse Matrix: $f\in C^2(D,\mathbb{R})$, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0\in D$

$$H_f(\vec{x}_0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0)\right)_{j,k=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\vec{x}_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Satz über lokale Extremstellen:
Gegeben: $f \in C^2(D,\mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x}_0 \in D$ mit $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.
Aussage:

- $H_f(\vec{x}_0)$ positiv (negativ) definit $\Rightarrow$ f hat in $\vec{x}_0$ ein lokales Minimum (Maximum).
- $H_f(\vec{x}_0)$ indefinit $\Rightarrow$ f hat in $\vec{x}_0$ einen Sattelpunkt.

Hinreichendes Existenzkriterium: Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen), $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist $f(K)$ kompakt und es gibt $\vec{a}, \vec{b} \in K$ mit

$$\min_{\vec{x}\in K} f(\vec{x}) = f(\vec{a}),\ \max_{\vec{x}\in K} f(\vec{x}) = f\left(\vec{b}\right).$$

Multiplikatorenregel von Lagrange:
Gegeben: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D,\mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$ mit $p < n$, $h = (h_1,\dots,h_p) \in C^1(D,\mathbb{R}^p)$, $S := \left\{\vec{x} \in D\colon h(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$,
$F(\vec{x},\lambda_1,\dots,\lambda_p) := f(\vec{x}) + \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(\vec{x})$ für $\vec{x} \in D, \lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{R}$.
Aussage: Hat f in $\vec{x}_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $h = \vec{0}$ und gilt $\operatorname{rang}(h'(\vec{x}_0)) = p$, dann gibt es $\lambda_1^0,\dots,\lambda_p^0 \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}(F)\left(\vec{x},\lambda_1^0,\dots,\lambda_p^0\right) = \vec{0}$.

Integralsätze

Definition	Sätze & Rechenregeln
Divergenz: $\vec{v} = (v_1,\dots,v_n)^T : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$:	**Rechenregeln I**:
$\operatorname{div}\vec{v} := \nabla\cdot\vec{v} = \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n$.	$f,g \in C^1(D,\mathbb{R}), \vec{v} \in \mathbb{C}^1(D,\mathbb{R}^n)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen:
Laplace $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal partiell-differenzierbar:	$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g,\ \operatorname{div}(f\vec{v}) = f\operatorname{div}(\vec{v}) + \langle\nabla f,\vec{v}\rangle$.
$\Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f$.	**Rechenregeln II**:
Rotation: $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)^T : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$:	$f,g \in C^2(D,\mathbb{R}), \vec{v} \in \mathbb{C}^2(D,\mathbb{R}^n)$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen:
$\operatorname{rot}(\vec{v}) := \nabla\times\vec{v} = \begin{pmatrix}\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\end{pmatrix}$.	$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f)) = \vec{0} = \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{v}))$, $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\langle\nabla f,\nabla g\rangle + f\Delta g$.
Kurvenintegrale von Skalarfeldern:	**Rechenregeln III**:
$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n\ :\ \int\limits_\gamma f\,\mathrm{d}s := \int\limits_a^b f(\gamma(t))\,\lVert\dot\gamma(t)\rVert\,\mathrm{d}t$.	$f \in C^1(D,\mathbb{R}), \vec{v} \in \mathbb{C}^1\left(D,\mathbb{R}^3\right)$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen:
Bogenlänge von Kurven:	$\operatorname{rot}(f\vec{v}) = f\operatorname{rot}(\vec{v}) + (\nabla f)\times\vec{v}$.
$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n\ :\ L(\gamma) := \int\limits_a^b \lVert\dot\gamma(t)\rVert\,\mathrm{d}t$.	**Kurvenintegral von Gradientenfeldern**:
Kurvenintegrale von Vektorfeldern:	$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n\ :\ \int\limits_\gamma \nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{s} = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.
$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n\ :\ \int\limits_\gamma \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} := \int\limits_a^b \langle\vec{v}(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle\,\mathrm{d}t$.	**Potentialfeldkriterium**:
Parameterdarstellung einer Fläche in $\mathbb{R}^3$:	$\vec{v} = (v_1,\dots,v_n) : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar:
$U \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet, $B \subseteq U$ Integrationsbereich, $\vec{g}\colon U \to \mathbb{R}^3$:	$\vec{v}$ Potentialfeld $\Rightarrow$ $\partial_j v_k = \partial_k v_j\ \forall j,k = 1,\dots,n$.
$\mathcal{F} := \vec{g}(B) = \{\vec{g}(u,v)\colon (u,v) \in B\}$.	"$\Leftarrow$" gilt, falls D einfach zusammenhängend.

Integralsatz von Gauß in $\mathbb{R}^2$: $G \subseteq \mathbb{R}^2$ geeignetes Gebiet, dann: $\oint\limits_{\partial G} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_G (\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y))\,\mathrm{d}(x,y)$.

Integralsatz von Stokes in $\mathbb{R}^3$: $\oint\limits_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(\vec{v})\cdot\mathrm{d}\vec{o}$, wobei $\partial\mathcal{F}$ mit Hilfe der rechten Hand orientiert ist.

Äußerer Normaleneinheitsvektor: $\vec{N}(\vec{g}(u,v)) = \frac{\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)}{\lVert\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\rVert}$, $(u,v) \in U$.

Divergenzsatz in $\mathbb{R}^2$: $\iint\limits_G \operatorname{div}(\vec{v})\,\mathrm{d}\tau = \oint\limits_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}(x,y)$. **Divergenzsatz in** $\mathbb{R}^3$: $\iiint\limits_G \operatorname{div}(\vec{v})\,\mathrm{d}\tau = \iint\limits_{\partial G} \vec{v}\cdot\vec{N}\,\mathrm{d}o$.

Flächeninhalt von $\mathcal{F}$: $\iint\limits_{\mathcal{F}} \mathrm{d}o = \iint\limits_B \lVert\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\rVert\,\mathrm{d}(u,v)$.

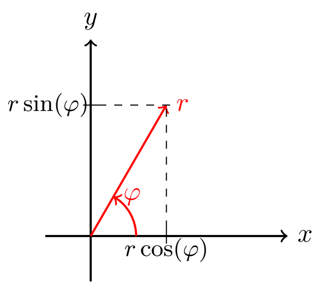
Oberflächenintegrale von $\mathcal{F}$:

$$\iint_{\mathcal{F}} f\,\mathrm{d}o := \iint_B f\left(\vec{g}(u,v)\right)\|\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\|\,\mathrm{d}(u,v),\quad \iint_{\mathcal{F}} \vec{w}\cdot\mathrm{d}\vec{o} := \iint_B \vec{w}\left(\vec{g}(u,v)\right)\cdot\left(\partial_u\vec{g}(u,v)\times\partial_v\vec{g}(u,v)\right)\mathrm{d}(u,v).$$

Koordinatentransformationen

Transformationsformel:
Gegeben: $B\subseteq\mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, $U\subseteq\mathbb{R}^n$ Gebiet mit $B\subseteq U$, $\Phi\colon U\mapsto\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, injektiv mit $\det\left(\Phi'\right)\neq 0$ auf U.
Aussage: Ist $f\colon\Phi(B)\to\mathbb{R}$ beschränkt, dann ist f über $\Phi(B)$ integrierbar, genau dann wenn $f\circ\Phi\left|\det\left(\Phi'\right)\right|$ über B integrierbar ist mit $\int\limits_{\Phi(B)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_B f\left(\Phi(y)\right)\left|\det\left(\Phi'(y)\right)\right|\mathrm{d}y$.

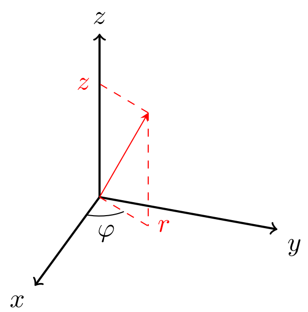
Polarkoordinaten



$$\Phi(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix},$$

$$\det\left(\Phi'(r,\varphi)\right) = r.$$

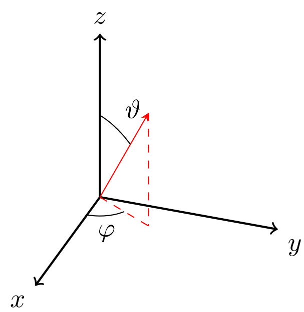
Zylinderkoordinaten



$$\Phi(r,\varphi,z) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\\ z\end{pmatrix},$$

$$\det\left(\Phi'(r,\varphi,z)\right) = r.$$

Kugelkoordinaten



$$\Phi(r,\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\vartheta)\\ r\sin(\varphi)\sin(\vartheta)\\ r\cos(\vartheta)\end{pmatrix},$$

$$\det\left(\Phi'(r,\varphi,\vartheta)\right) = r^2\sin(\vartheta).$$

Allgemeines

Arkusfunktionen:

$$\arcsin\colon[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \arccos\colon[-1,1]\to[0,\pi]\ \text{ und }\ \arctan\colon\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Wichtige Sinus-, Cosinus- und Tanges-Werte:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Additionstheoreme

$$\cos(x\pm y) = \cos(x)\cos(y)\mp\sin(x)\sin(y),$$
$$\sin(x\pm y) = \sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y),$$
$$\tan(x\pm y) = \frac{\tan(x)\pm\tan(y)}{1\mp\tan(x)\tan(y)},$$
$$\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1.$$

Folgerungen

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x),$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x)-\sin^2(x),$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2},$$
$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Integration

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$

Partielle Integration: $\int\limits_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int\limits_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$, wobei $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig-differenzierbar.

Substitutionsregel:

$$\int\limits_a^b f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\mathrm{d}t,$$ wobei $\varphi\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig-differenzierbar und $f\colon\varphi\left([a,b]\right)\to\mathbb{R}$ stetig.