21.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

0. Übungsblatt
(wird am Mittwoch, den 22.04.2020 besprochen)

Aufgabe 1 (Gram-Schmidt Verfahren)

(a) Gegeben seien die drei Vektoren in $\mathbb{C}^3$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind und berechnen Sie anschließend mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens aus diesen drei Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$.

(b) Gegeben seien die drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$ <u>nicht</u> linear unabhängig sind und geben anschließend eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ an.

Aufgabe 2 (Unitäre Matrizen)

(a) Gegeben seien die beiden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ durch einen dritten Vektor $\vec{v}_3 \in \mathbb{C}^3$ so, dass die Matrix $U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ unitär ist. Ist der Vektor $\vec{v}_3$ eindeutig? Falls nein, geben Sie alle möglichen Vektoren an.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie:

(b1) $\langle A\vec{z}, A\vec{z}\rangle = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle$ für alle Vektoren $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$.

(b2) Sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $A\vec{z} = \lambda\vec{z}$, so folgt $|\lambda| = 1$.

Hinweise:

- Bitte melden Sie sich bis zum Samstag, den 25.04.2020 bis 20.00 Uhr unter dem Link

  `https://www.redseat.de/kit-etit/`

  für ein Tutorium an.

- Melden Sie sich im Ilias (`https://ilias.studium.kit.edu/`) für diesen Kurs an.

- Alle wichtigen Informationen werden im Ilias stehen und auch auf der Homepage

  `http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etit2020s/`

  Die Video-Aufzeichnungen der Vorlesungen, Übungen, etc. werden aber **nur** im Ilias zugänglich sein.

- In der Übung werden hauptsächlich die Aufgaben vorgerechnet und Tipps, Hinweise, etc. gegeben.

- Im Tutorium sollen die Studierenden die Aufgaben unter Hilfestellung lösen, dabei orientieren sich die Tutoriumsaufgaben stets stark an den Aufgaben aus der Übung. Es werden eventuell so nur teilweise Lösungen besprochen, allerdings wird es Lösungsvorschläge zu allen Aufgaben (Übung und Tutorium) online auf der Homepage und im Ilias geben.