21.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 0. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Gram-Schmidt Verfahren)

(a) Gegeben seien die drei Vektoren in $\mathbb{C}^3$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig sind und berechnen Sie anschließend mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens aus diesen drei Vektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$.

(b) Gegeben seien die drei Vektoren in $\mathbb{R}^4$

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ und $\vec{u}_3$ <u>nicht</u> linear unabhängig sind und geben anschließend eine Orthonormalbasis des Vektorraums $\operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ an.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ linear unabhängig.
Wir setzen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

<u>Zu zeigen:</u> $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{C}^3$ als Lösung.
<u>Mit Hilfe</u> des Gauß-Algorithmus erhalten wir somit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 3\mathrm{i} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \mid \cdot \frac{1}{\mathrm{i}} \\ + \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot 1 \quad \cdot 1 \mid \left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 1 \quad \cdot 2 \mid \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. nur $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{C}^3$ löst $A\vec{x} = \vec{0}$ und somit sind $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig.

Schritt 2. Das Gram-Schmidt Verfahren

$\underline{k=1}$: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\vec{c}_1 := \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_1$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_1$:

$$\|\vec{c}_1\| = \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |1|^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

und weiter ist

$$\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle = \|\vec{c}_1\|^2 = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Also ist nun der Vektor $\vec{b}_1$ gegeben durch

$$\vec{b}_1 := \frac{1}{\|\vec{c}_1\|}\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

$\underline{k=2}$: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\begin{aligned} \vec{c}_2 &:= \vec{v}_2 - \sum_{j=1}^{2-1} \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_j \rangle}{\langle \vec{c}_j, \vec{c}_j \rangle} \vec{c}_j \\ &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle} \vec{c}_1. \end{aligned}$$

Für die Bestimmung des Vektors $\vec{c}_2$ fehlt nur noch der Wert des Skalarproduktes $\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2\left(1 \cdot \overline{1} + \mathrm{i} \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1}\right) = 2\left(1 \cdot 1 + \mathrm{i} \cdot 0 + 0 \cdot 1\right) = 2\left(1+0+0\right) = 2, \end{aligned}$$

da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der ersten Komponente linear und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. Demnach erhalten wir eingesetzt in die obere Formel für den Vektor $\vec{c}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{c}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle}\vec{c}_1 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3. \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_2$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + |2\mathrm{i}|^2 + |-1|^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}, \end{aligned}$$

da $|2\mathrm{i}| = 2$ ist, und weiter ist

$$\langle \vec{c}_2, \vec{c}_2 \rangle = \|\vec{c}_2\|^2 = \sqrt{6}^2 = 6.$$

Also ist nun der Vektor $\vec{b}_2$ gegeben durch

$$\vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|}\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

$\underline{k=3}$: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\vec{c}_3 := \vec{v}_3 - \sum_{j=1}^{3-1} \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{c}_j \rangle}{\langle \vec{c}_j, \vec{c}_j \rangle}\vec{c}_j = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle}\vec{c}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{c}_2 \rangle}{\langle \vec{c}_2, \vec{c}_2 \rangle}\vec{c}_2.$$

Für die Bestimmung des Vektors $\vec{c}_3$ fehlten nur noch die Werte der beiden Skalarprodukte $\langle \vec{v}_3, \vec{c}_1 \rangle$ und $\langle \vec{v}_3, \vec{c}_2 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{v}_3, \vec{c}_1 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3\mathrm{i} \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 5 + 0 + 1 = 6, \\
\langle \vec{v}_3, \vec{c}_2 \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 \cdot \overline{1} + 3\mathrm{i} \cdot \overline{2\mathrm{i}} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 \cdot 1 + 3\mathrm{i} \cdot (-2\mathrm{i}) + 1 \cdot (-1) \\
&= 5 - 6\mathrm{i}^2 - 1 = 4 + 6 = 10.
\end{aligned}$$

da $\overline{2\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$ und $\mathrm{i}^2 = -1$ ist. Demnach erhalten wir eingesetzt in die obere Formel für den Vektor $\vec{c}_3$:

$$\begin{aligned}
\vec{c}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle} \vec{c}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{c}_2 \rangle}{\langle \vec{c}_2, \vec{c}_2 \rangle} \vec{c}_2 \\
&= \begin{pmatrix} 5 \\ 3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \left[6 \begin{pmatrix} 5 \\ 3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} - 18 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 30 \\ 18\mathrm{i} \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 20\mathrm{i} \\ -10 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 - 18 - 10 \\ 18\mathrm{i} - 0 - 20\mathrm{i} \\ 6 - 18 + 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -2\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-2}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_3$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_3$:

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}_3\| &= \left\| -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left| -\frac{1}{3} \right| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \sqrt{|-1|^2 + |\mathrm{i}|^2 + |1|^2} \\
&= \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \sqrt{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

wegen der Homogenität der Normfunktion $\|\cdot\|$ und wegen $|\mathrm{i}| = 1$. Also ist nun der Vektor $\vec{b}_3$ gegeben durch

$$\vec{b}_3 := \frac{1}{\|\vec{c}_3\|} \vec{c}_3 = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3.$$

Zusammenfassend gilt nun:

$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{lin} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \operatorname{lin} \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$$

und $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ sind orthonormal zueinander. □

(b) **Schritt 1.** $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ nicht linear unabhängig.

Wir setzen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

Zu zeigen: $A\vec{x} = \vec{0}$ hat eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$.

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus erhalten wir somit:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. wenn wir $x_3 = t \in \mathbb{R}$ setzen, muss

$$x_1 = -2x_3 = -2t \text{ und } x_2 = x_3 = t$$

gelten, also löst für $t = 1 \in \mathbb{R}$ der Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\vec{0}\right\}$$

demnach das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ und somit sind $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ nicht linear unabhängig.
Aber: $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind linear unabhängig und es gilt:

$$U := \operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}.$$

Schritt 2. Das Gram-Schmidt Verfahren
<u>$k = 1$</u>: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\vec{c}_1 := \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_1$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_1$:

$$\|\vec{c}_1\| = \sqrt{|1|^2 + |-1|^2 + |1|^2 + |-1|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

und weiter ist

$$\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle = \|\vec{c}_1\|^2 = 2^2 = 4.$$

Also ist nun der Vektor $\vec{b}_1$ gegeben durch

$$\vec{b}_1 := \frac{1}{\|\vec{c}_1\|}\vec{c}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

<u>$k = 2$</u>: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\begin{aligned} \vec{c}_2 &:= \vec{v}_2 - \sum_{j=1}^{2-1} \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{c}_j \rangle}{\langle \vec{c}_j, \vec{c}_j \rangle}\vec{c}_j \\ &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle}\vec{c}_1. \end{aligned}$$

Für die Bestimmung des Vektors $\vec{c}_2$ fehlt nur noch der Wert des Skalarproduktes $\langle \vec{u}_2, \vec{c}_1 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_2, \vec{c}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 5 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{(-1)} + 1 \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{(-1)} \\ &= 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 5 - 1 + 1 - 1 = 4. \end{aligned}$$

Demnach erhalten wir eingesetzt in die obere Formel für den Vektor $\vec{c}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{c}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle}\vec{c}_1 &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_2$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}_2\| &= \left\| 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |2| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= 2\sqrt{|2|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |1|^2} = 2\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = 2\sqrt{4 + 1 + 0 + 1} = 2\sqrt{6}, \end{aligned}$$

wegen der Homogenität der Normfunktion $\|\cdot\|$. Also ist nun der Vektor $\vec{b}_2$ gegeben durch

$$\vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|}\vec{c}_2 = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Zusammenfassend gilt nun:

$$U = \operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \operatorname{lin}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\}$$

und $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ sind orthonormal zueinander. $\square$

Aufgabe 2 (Unitäre Matrizen)

(a) Gegeben seien die beiden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ergänzen Sie die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ durch einen dritten Vektor $\vec{v}_3 \in \mathbb{C}^3$ so, dass die Matrix $U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ unitär ist. Ist der Vektor $\vec{v}_3$ eindeutig? Falls nein, geben Sie alle möglichen Vektoren an.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie:

(b1) $\langle A\vec{z}, A\vec{z}\rangle = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle$ für alle Vektoren $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$.

(b2) Sind $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $A\vec{z} = \lambda\vec{z}$, so folgt $|\lambda| = 1$.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Es gilt für die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind orthogonal zueinander mit

$$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = 1.$$

Schritt 1.1. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind orthogonal zueinander

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2\rangle &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\left(\frac{1}{2}\right)} \left\langle \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\mathrm{i} \cdot \overline{1} + (-1) \cdot \overline{(-\mathrm{i})} + 0 \cdot \overline{(1-\mathrm{i})}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\mathrm{i} \cdot 1 + (-1) \cdot \mathrm{i} + 0 \cdot (1+\mathrm{i})) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\mathrm{i} - \mathrm{i} + 0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente antilinear ist, sowie $\overline{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ und $\overline{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$ ist. Dies zeigt nun, dass die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthogonal zueinander sind.

Schritt 1.2. $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind normiert, d.h.

$$\|\vec{v}_1\| = 1 = \|\vec{v}_2\|.$$

Dazu benötigen wir insbesondere:

$$|1-\mathrm{i}| = \sqrt{\operatorname{Re}(1-\mathrm{i})^2 + \operatorname{Im}(1-\mathrm{i})^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Es gilt nun für die Normen der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}_1\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{|\mathrm{i}|^2 + |-1|^2 + |0|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1+1+0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1, \\ \|\vec{v}_2\| &= \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{1}{2} \right| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{|1|^2 + |-\mathrm{i}|^2 + |1-\mathrm{i}|^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+1+2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \end{aligned}$$

wegen der Homogenität der Normfunktion $\|\cdot\|$ und wegen $|\mathrm{i}| = 1 = |-\mathrm{i}|$. Dies zeigt nun, dass die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ normiert sind. Also sind die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthonormal zueinander.

Schritt 2. Aufstellen von Gleichungen zur Berechnung von $\vec{v}_3$.

Da der Vektor $\vec{v}_3$ insbesondere orthogonal zu den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sein soll, erhalten wir für einen Vektor $(a,b,c)^T \in \mathbb{C}^3$ die beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \cdot \overline{\mathrm{i}} + b \cdot \overline{(-1)} + c \cdot \overline{0} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a \cdot (-\mathrm{i}) + b \cdot (-1) + c \cdot 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-a\mathrm{i} - b + 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-a\mathrm{i} - b \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mathrm{i}a + b \right), \\
0 &= \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}_2 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{\left(\frac{1}{2}\right)} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(a \cdot \overline{1} + b \cdot \overline{(-\mathrm{i})} + c \cdot \overline{(1-\mathrm{i})} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(a \cdot 1 + b \cdot \mathrm{i} + c \cdot (1+\mathrm{i}) \right) = \frac{1}{2} \left(a + \mathrm{i}b + (1+\mathrm{i})\, c \right),
\end{aligned}$$

da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der zweiten Komponente antilinear ist, sowie $\overline{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$, $\overline{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ und $\overline{1-\mathrm{i}} = 1+\mathrm{i}$ ist. Durch Multiplizieren der ersten Gleichung mit dem Faktor $-\sqrt{2}$ und die zweite Gleichung mit dem Faktor 2 erhalten wir folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}a + b &= 0, \\
a + \mathrm{i}b + (1+\mathrm{i})\, c &= 0.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Lösen des obigen linearen Gleichungssystems

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus erhalten wir somit:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot (-\mathrm{i}) \;\; \cdot(-1) \\ \quad + \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \quad + \\ \mid \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \;\; \cdot \mathrm{i} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} \end{pmatrix},$$

da $\mathrm{i}^2 = -1$ ist, d.h. als Lösung ergibt sich nun:

$$a = -\frac{1+\mathrm{i}}{2} c, \; b = -\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} c \in \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{C} \text{ beliebig.}$$

Aus der Bedingung, dass der Vektor $\vec{v}_3$ normiert sein, d.h. $\|\vec{v}_3\| = 1$ sein soll, folgt, dass $\vec{v}_3 \neq \vec{0}$ gewählt werden soll, demnach müssen wir $c \neq 0$ fordern, denn sonst wäre

$$a = -\frac{1+\mathrm{i}}{2} c = -\frac{1+\mathrm{i}}{2} \cdot 0 = 0, \; b = -\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} c = -\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} \cdot 0 = 0 \text{ und } c = 0.$$

Wir wählen z.B.

$$c = -2\mathrm{i}t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ für } t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1+\mathrm{i}}{2} c = -\frac{1+\mathrm{i}}{2} \cdot (-2\mathrm{i}t) = (1+\mathrm{i})\, \mathrm{i}t = (\mathrm{i}-1)\, t, \\
b &= -\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} c = -\frac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} \cdot (-2\mathrm{i}t) = (1+\mathrm{i})\, t, \\
c &= -2\mathrm{i}t,
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathrm{i}-1)\, t \\ (1+\mathrm{i})\, t \\ -2\mathrm{i}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} t \in \mathbb{C}^3 \text{ für } t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Schritt 4. Normiertheit von $\vec{v}_3$

Dazu benötigen wir insbesondere:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{i}-1| &= \sqrt{\mathrm{Re}\,(\mathrm{i}-1)^2 + \mathrm{Im}\,(\mathrm{i}-1)} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \\
|1+\mathrm{i}| &= \sqrt{\mathrm{Re}\,(1+\mathrm{i})^2 + \mathrm{Im}\,(1+\mathrm{i})} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Es gilt nun für die Norm des Vektors $(a,b,c)^T \in \mathbb{C}^3$:

$$N(t) := \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} t \right\| = |t| \left\| \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\|$$

$$= |t| \sqrt{|\mathrm{i}-1|^2 + |1+\mathrm{i}|^2 + |-2\mathrm{i}|^2} = |t| \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 + 2^2} = |t| \sqrt{2+2+4} = |t| \sqrt{8} = |t| \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}\, |t| \,,$$

wegen der Homogenität der Normfunktion $\|\cdot\|$ und wegen $|-2\mathrm{i}| = 2$.
Schritt 5. Vektor $\vec{v}_3$ aufstellen Wir können nun den Vektor $\vec{v}_3$ folgendermaßen definieren:

$$\vec{v}_3(t) := \frac{1}{N(t)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,|t|} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{t}{|t|} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, bzw. da

$$\left| \frac{t}{|t|} \right| = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ist,}$$

können wir die möglichen Vektoren $\vec{v}_3(\cdot)$ auch schreiben als

$$\vec{v}_3\,(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

für alle $\theta \in [0, 2\pi)$. Damit ist $\vec{v}_3$ nicht eindeutig, denn für $\theta_1 := 0 \in [0, 2\pi)$ und für $\theta_2 := \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \vec{v}_3\,(\theta_1) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 0}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{0}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ \neq \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} &= \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \vec{v}_3\,(\theta_2)\,, \end{aligned}$$

da $\mathrm{e}^0 = 1$, $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{i}$ und $\mathrm{i} \neq 1$ ist. Mit $\vec{v}_3\,(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ haben wir alle möglichen Kandidaten mit den gewünschten Eigenschaften gefunden, da diese sie per Konstruktion erfüllen müssen.
Zusammenfassend gilt nun:

$$U\,(\theta) := \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3\,(\theta) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

ist für alle $\theta \in [0, 2\pi)$ eine unitäre Matrix. □
(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix.
(b1) Sei $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ fest. Da die Matrix A unitär ist, folgt nun per Definition, dass die Matrix A regulär ist mit Inverser Matrix $A^{-1} = A^*$. Nun folgt damit und aus den Rechenregeln für adjungierte Matrizen (in Skalarprodukten), dass

$$\langle A\vec{z}, A\vec{z} \rangle = \langle \vec{z}, A^*A\vec{z} \rangle = \left\langle \vec{z}, A^{-1}A\vec{z} \right\rangle = \langle \vec{z}, I_n\vec{z} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle$$

gilt. Da nun der Vektor $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ beliebig war, folgt die Behauptung. □
(b2) Sei erstmal $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass es einen Vektor $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gibt mit $A\vec{z} = \lambda\vec{z}$. Es gilt nach Aufgabe 2. (b1) und wegen der Beziehung $A\vec{z} = \lambda\vec{z}$:

$$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle A\vec{z}, A\vec{z} \rangle = \langle \lambda\vec{z}, \lambda\vec{z} \rangle = \lambda\overline{\lambda}\,\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = |\lambda|^2 \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \,,$$

da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente antilinear ist. Da aus der Bedingung $\vec{z} \neq \vec{0}$ folgt, dass auch $\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \neq 0$ ist, erhalten wir nun

$$\begin{aligned} &\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = |\lambda|^2 \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \\ \Leftrightarrow\ &1 = |\lambda|^2 \\ \Leftrightarrow\ &1 = |\lambda| \,, \end{aligned}$$

da $|\lambda| \geq 0$ ist. Dies war zu zeigen. □
Bemerkung: Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ gibt mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, heißt **Eigenwert** von der Matrix A und jeder solcher Vektoren $\vec{v}$ heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ (Siehe auch Kapitel 18 im Skript).