21.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

1. Übungsblatt
(wird am Donnerstag, den 23.04.2020 besprochen)

Aufgabe 1 (Determinantenberechnung)

(a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Gegeben seien die beiden Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Berechnen Sie jeweils die Determinante von den Matrizen B_1 und B_2 mit Hilfe

(b1) der Regel von Sarrus.

(b2) des Laplace'schen Entwicklungssatzes nach der ersten Zeile.

(b3) Spaltenumformungen und anschließender passenden Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes.

(c) Gegeben sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Berechnen Sie die Determinante von der Matrix C indem Sie mittels Spaltenumformung die erste Zeile zum ersten Einheitsvektor umformen und anschließend nach diesem entwickeln. Versuchen Sie hierbei für die weiter aufkommenden 3×3-Matrizen nicht die Regel von Sarrus zu verwenden, sondern berechnen Sie diese wie in Teil (b2) bzw. (b3) mit Hilfe vom Laplace'schen Entwicklungssatz.

(d) Welche der in dieser Aufgabe aufgetretenen Matrizen war singulär (d.h. nicht invertierbar)?

Lösung von Aufgabe 1

(a) Es gilt laut Vorlesung:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) - (-7) \cdot (-2) = -3 - 14 = -17.$$

Damit ist die Determinante der Matrix A gleich -17. $\square$

(b1) Nach der Regel von Sarrus gilt:

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 7\cdot 5\cdot 3 - 8\cdot 6\cdot 1 - 9\cdot 4\cdot 2$$
$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 225 - 225 = 0.$$

Damit ist die Determinante der Matrix B_1 gleich null.
Nach der Regel von Sarrus gilt:

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 8 + 4\cdot 3\cdot 5 + 7\cdot 9\cdot 0 - 5\cdot 2\cdot 7 - 0\cdot 3\cdot 2 - 8\cdot 9\cdot 4$$
$$= 32 + 60 + 0 - 70 - 0 - 288 = 92 - 358 = -266.$$

Damit ist die Determinante der Matrix B_2 gleich -266. $\square$

(b2) Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Zeile, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= +1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= (5\cdot 9 - 8\cdot 6) - 2\cdot(4\cdot 9 - 7\cdot 6) + 3\cdot(4\cdot 8 - 7\cdot 5) \\
&= (45 - 48) - 2\cdot(36 - 42) + 3\cdot(32 - 35) \\
&= -3 - 2\cdot(-6) + 3\cdot(-3) = -3 + 12 - 9 = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist die Determinante der Matrix B_1 gleich null.
Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Zeile, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} &= +2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 2\cdot(2\cdot 8 - 0\cdot 3) - 4\cdot(9\cdot 8 - 5\cdot 3) + 7\cdot(9\cdot 0 - 5\cdot 2) \\
&= 2\cdot(16 - 0) - 4\cdot(72 - 15) + 7\cdot(0 - 10) \\
&= 2\cdot 16 - 4\cdot 57 + 7\cdot(-10) = 32 - 228 - 70 = -266.
\end{aligned}$$

Damit ist die Determinante der Matrix B_2 gleich -266. $\square$

(b3) Laut der Vorlesung verändern Spaltenumformungen den Wert der Determinante nicht, deswegen gilt:

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da wir nun eine Nullspalte erzeugt haben, muss für die Determinante nun schon

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

folgen. Damit ist die Determinante der Matrix B_1 gleich null.
Wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion det und wegen

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt nun

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 9 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Laut der Vorlesung verändern Spaltenumformungen den Wert der Determinante nicht, deswegen gilt:

$$\det(B_2) = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 9 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Zeile, erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(B_2) = 2\begin{vmatrix} -16 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \left(-0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -16 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \cdot \left(-0 + \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} - 0 \right) = 2 \cdot \begin{vmatrix} -16 & 1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-16 \cdot 8 - 5 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot (-128 - 5) = 2 \cdot (-133) = -266. \end{aligned}$$

Damit ist die Determinante der Matrix B_2 gleich -266. □

(c) Laut der Vorlesung verändern Spaltenumformungen den Wert der Determinante nicht, deswegen gilt:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 10 & 4 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 3 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Zeile, erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 0 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Laut der Vorlesung verändern Spaltenumformungen den Wert der Determinante nicht, deswegen gilt:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Zeile, erhalten wir

$$\begin{aligned} det(C) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= -1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -((-4) \cdot 2 - 1 \cdot (-8)) = -(-8+8) = -0 = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Determinante der Matrix C gleich null. □

(d) Es gilt für die Determinanten aus den Aufgabenteilen (a), (b) und (c):

$$\det(A) = -17, \ \det(B_1) = 0, \ \det(B_2) = -266 \text{ und } \det(C) = 0.$$

Die beiden Matrizen B_1 und C waren singulär, da dies die einzigen Matrizen waren, die Determinante gleich null hatten ($\det(B_1) = \det(C) = 0$). □

Aufgabe 2 (Zweite Cramersche Regel)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Gegeben ist das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}(\lambda-2)\,x_1+(\lambda-1)\,x_2-(\lambda-1)\,x_3&=0,\\(6-3\lambda)\,x_1+\left(\lambda^2-1\right)x_2+(\lambda-1)\,x_3&=0,\\\left(\lambda^2-\lambda-2\right)x_1+\lambda\,(\lambda-1)\,x_2-\lambda\,(\lambda-1)\,x_3&=\lambda-1.\end{aligned}$$

Gesucht ist hierbei (sofern existent) die Lösung $\vec{x} := (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{C}^3$.

(a) Geben Sie die Matrix $A_\lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und den Vektor $\vec{b}_\lambda \in \mathbb{R}^3$ an so, dass das obige Gleichungssystem äquivalent ist zu dem linearen Gleichungssystem
$$A_\lambda \vec{x} = \vec{b}_\lambda.$$

(b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix A_λ.

(c) Für welche Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das obige Gleichungssystem eindeutig lösbar. Geben Sie in diesen Fällen die Lösung $\vec{x}$ mittels der Cramerschen Regel an.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Nach der Mitternachtsformel gilt:

$$\begin{aligned}0=\lambda_{1,2}^2-\lambda_{1,2}-2\ \Leftrightarrow\ \lambda_{1,2}&=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}\\\Leftrightarrow\ \lambda_{1,2}&=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}\\\Leftrightarrow\ \lambda_1&=\frac{1-3}{2}=\frac{-2}{2}=-1\text{ und }\lambda_2=\frac{1+3}{2}=\frac{4}{2}=2.\end{aligned}$$

Daher gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:
$$\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)\,(\lambda-2)\,.$$

Aus dem obigen Gleichungssystem lesen wir die Koeffizientenmatrix A_λ ab:

$$A_\lambda := \begin{pmatrix}\lambda-2&\lambda-1&-(\lambda-1)\\6-3\lambda&\lambda^2-1&\lambda-1\\\lambda^2-\lambda-2&\lambda\,(\lambda-1)&-\lambda\,(\lambda-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-2&\lambda-1&-(\lambda-1)\\-3\,(\lambda-2)&(\lambda+1)\,(\lambda-1)&\lambda-1\\(\lambda+1)\,(\lambda-2)&\lambda\,(\lambda-1)&-\lambda\,(\lambda-1)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3},$$

da nach der dritten binomischen Formel $\lambda^2-1=(\lambda+1)\,(\lambda-1)$ ist, sowie $6-3\lambda=-3\,(\lambda-2)$ ist. Weiter setzen wir den Vektor $\vec{b}_\lambda$ als
$$\vec{b}_\lambda := \begin{pmatrix}0\\0\\\lambda-1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3.$$

Nun ist das obige Gleichungssystem äquivalent zu

$$A_\lambda\vec{x}=\begin{pmatrix}\lambda-2&\lambda-1&-(\lambda-1)\\-3\,(\lambda-2)&(\lambda+1)\,(\lambda-1)&\lambda-1\\(\lambda+1)\,(\lambda-2)&\lambda\,(\lambda-1)&-\lambda\,(\lambda-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1-\lambda\end{pmatrix}=\vec{b}_\lambda.$$

□

(b) Aus

$$\begin{pmatrix}\lambda-2\\-3\,(\lambda-2)\\(\lambda+1)\,(\lambda-2)\end{pmatrix}=(\lambda-2)\begin{pmatrix}1\\-3\\\lambda+1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\lambda-1\\(\lambda+1)\,(\lambda-1)\\\lambda\,(\lambda-1)\end{pmatrix}=(\lambda-1)\begin{pmatrix}1\\\lambda+1\\\lambda\end{pmatrix}\text{ und }\begin{pmatrix}-(\lambda-1)\\\lambda-1\\-\lambda\,(\lambda-1)\end{pmatrix}=(\lambda-1)\begin{pmatrix}-1\\1\\-\lambda\end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion det gilt nun

$$\det(A_\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-1&-(\lambda-1)\\-3\,(\lambda-2)&(\lambda+1)\,(\lambda-1)&\lambda-1\\(\lambda+1)\,(\lambda-2)&\lambda\,(\lambda-1)&-\lambda\,(\lambda-1)\end{vmatrix}=(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&-1\\-3&\lambda+1&1\\\lambda+1&\lambda&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$
= (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} .
$$

Laut der Vorlesung verändern Spaltenumformungen den Wert der Determinante nicht, deswegen gilt:

$$
\det(A_\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & \lambda + 1 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} .
$$

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Zeile, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\det(A_\lambda) &= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & \lambda + 2 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \cdot \left(+0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & \lambda + 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \\
&= (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 \cdot (0 - 0 - ((-2) \cdot 0 - 1 \cdot (\lambda + 2))) \\
&= -(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2 (0 - (\lambda + 2)) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 .
\end{aligned}
$$

Abschließend gilt:

$$
\det(A_\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 .
$$

□

(c) **Schritt 1.** Invertierbarkeit der Matrix A_λ
Die Matrix A_λ ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A_\lambda) \neq 0$ ist, also muss in diesem Fall gelten:

$$
\begin{aligned}
0 \neq \det(A_\lambda) &\Leftrightarrow 0 \neq (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2 \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\} .
\end{aligned}
$$

Sei also nun $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 2\}$ fest, so ist die Matrix A_λ invertierbar. Setze

$$
A_\lambda =: \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{(\lambda)} & \vec{a}_2^{(\lambda)} & \vec{a}_3^{(\lambda)} \end{pmatrix}
$$

mit Vektoren

$$
\vec{a}_1^{(\lambda)}, \vec{a}_2^{(\lambda)}, \vec{a}_3^{(\lambda)} \in \mathbb{R}^3 .
$$

Schritt 2. Benötigte Determinanten berechnen
Für die Anwendung der Cramerschen Regel benötigen wir folgende drei Determinanten:

$$
\begin{aligned}
D_1 &:= \det\left(\vec{b}_\lambda, \vec{a}_2^{(\lambda)}, \vec{a}_3^{(\lambda)}\right) , \\
D_2 &:= \det\left(\vec{a}_1^{(\lambda)}, \vec{b}_\lambda, \vec{a}_3^{(\lambda)}\right) , \\
D_3 &:= \det\left(\vec{a}_1^{(\lambda)}, \vec{a}_2^{(\lambda)}, \vec{b}_\lambda\right) .
\end{aligned}
$$

Schritt 2.1 Determinante D_1 berechnen
Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Spalte, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
D_1 = \det\left(\vec{b}_\lambda, \vec{a}_2^{(\lambda)}, \vec{a}_3^{(\lambda)}\right) &= \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 & -(\lambda - 1) \\ 0 & (\lambda + 1)(\lambda - 1) & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & \lambda(\lambda - 1) & -\lambda(\lambda - 1) \end{vmatrix} \\
&= +0 \cdot \begin{vmatrix} (\lambda + 1)(\lambda - 1) & \lambda - 1 \\ \lambda(\lambda - 1) & -\lambda(\lambda - 1) \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -(\lambda - 1) \\ \lambda(\lambda - 1) & -\lambda(\lambda - 1) \end{vmatrix} + (\lambda - 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -(\lambda - 1) \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1) & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\
&= 0 - 0 + (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -(\lambda - 1) \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1) & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -(\lambda - 1) \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1) & \lambda - 1 \end{vmatrix} .
\end{aligned}
$$

Aus

$$
\begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1) \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -(\lambda - 1) \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion det gilt nun

$$\begin{aligned} D_1 &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -(\lambda-1) \\ (\lambda+1)(\lambda-1) & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)^3\left(1\cdot 1-(\lambda+1)\cdot(-1)\right) = (\lambda-1)^3(1+\lambda+1) = (\lambda+2)(\lambda-1)^3. \end{aligned}$$

Also lautet die Determinante $D_1 = (\lambda+2)(\lambda-1)^3$.

Schritt 2.2 Determinante D_2 berechnen

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} D_2 &= \det\left(\vec{a}_1^{(\lambda)}, \vec{b}_\lambda, \vec{a}_3^{(\lambda)}\right) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -(\lambda-1) \\ -3(\lambda-2) & 0 & \lambda-1 \\ (\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda-1 & -\lambda(\lambda-1) \end{vmatrix} \\ &= -0\cdot\begin{vmatrix} -3(\lambda-2) & \lambda-1 \\ (\lambda+1)(\lambda-2) & -\lambda(\lambda-1) \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ (\lambda+1)(\lambda-2) & -\lambda(\lambda-1) \end{vmatrix} - (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ -3(\lambda-2) & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= -0+0-(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ -3(\lambda-2) & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ -3(\lambda-2) & \lambda-1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 \\ -3(\lambda-2) \end{pmatrix} = (\lambda-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -(\lambda-1) \\ \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion det gilt nun

$$\begin{aligned} D_2 &= -(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -(\lambda-1) \\ -3(\lambda-2) & \lambda-1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-1)^2\left(1\cdot 1-(-3)\cdot(-1)\right) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2(1-3) = 2(\lambda-2)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

Also lautet die Determinante $D_2 = 2(\lambda-2)(\lambda-1)^2$.

Schritt 2.3 Determinante D_3 berechnen

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der dritten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} D_3 &= \det\left(\vec{a}_1^{(\lambda)}, \vec{a}_2^{(\lambda)}, \vec{b}_\lambda\right) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 & 0 \\ -3(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1) & 0 \\ (\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda(\lambda-1) & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= +0\cdot\begin{vmatrix} -3(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1) \\ (\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda(\lambda-1) \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 \\ (\lambda+1)(\lambda-2) & \lambda(\lambda-1) \end{vmatrix} + (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 \\ -3(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1) \end{vmatrix} \\ &= 0-0+(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 \\ -3(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1) \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 \\ -3(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{pmatrix} \lambda-2 \\ -3(\lambda-2) \end{pmatrix} = (\lambda-2)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \lambda-1 \\ (\lambda+1)(\lambda-1) \end{pmatrix} = (\lambda-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda+1 \end{pmatrix}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion det gilt nun

$$\begin{aligned} D_3 &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-1 \\ -3(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-1) \end{vmatrix} = (\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdot(\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-1)^2\left(1\cdot(\lambda+1)-(-3)\cdot 1\right) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2(\lambda+1+3) = (\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-1)^2. \end{aligned}$$

Also lautet die Determinante $D_3 = (\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-1)^2$.

Schritt 3. Aufstellen der Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{C}^3$

Laut der (zweiten) Cramerschen Regel gilt für die Lösung $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems $A_\lambda\vec{x} = \vec{b}_\lambda$:

$$x_1 = \frac{D_1}{\det(A_\lambda)} = \frac{(\lambda+2)(\lambda-1)^3}{(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda-1}{\lambda-2} \in \mathbb{R},$$

$$x_2 = \frac{D_2}{\det(A_\lambda)} = \frac{2(\lambda-2)(\lambda-1)^2}{(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{2}{\lambda+2} \in \mathbb{R},$$
$$x_3 = \frac{D_3}{\det(A_\lambda)} = \frac{(\lambda-2)(\lambda+4)(\lambda-1)^2}{(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda+4}{\lambda+2} \in \mathbb{R}.$$

Also löst der Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda-2} \\ \frac{2}{\lambda+2} \\ \frac{\lambda+4}{\lambda+2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

löst das lineare Gleichungssystem $A_\lambda \vec{x} = \vec{b}_\lambda$. $\square$