

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Übungsblatt

(wird am Mittwoch, den 29.04.2020 besprochen)

Aufgabe 1 (Kreuz- & Spatprodukt)

Gegeben seien die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ der beiden Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 . Was sagt dies über die Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 aus? Wie steht $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ zu den beiden Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 ? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.
- Berechnen Sie das Spatprodukt $\langle \vec{v}_3 \times \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Was beschreibt dieses?
- Was beschreibt $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$? Und berechnen Sie diesen Wert. Geben Sie zusätzlich einen Ausdruck für den Winkel zwischen den beiden Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 an.

Aufgabe 2 (Eigenwertberechnung I)

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A , sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.
- Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort, und falls ja, dann geben Sie auch eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ an mit $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 3 (Eigenwertberechnung II)

Wir definieren den \mathbb{C} -Vektorraum

$$P_2 := \{p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{Es existieren } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ mit } p(x) = ax^2 + bx + c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

der Polynome vom Grad höchstens 2, sowie die lineare Abbildung

$$D: P_2 \rightarrow P_2, D[p](x) := x^2 \frac{d^2 p}{dx^2}(x) + x \frac{dp}{dx}(x) \text{ für } p \in P_2, x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte der Abbildung D , sowie die zugehörigen Eigenfunktionen.