25.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Kreuz- & Spatprodukt)

Gegeben seien die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ der beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Was sagt dies über die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aus? Wie steht $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ zu den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie das Spatprodukt $\langle \vec{v}_3 \times \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Was beschreibt dieses?

(c) Was beschreibt $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$? Und berechnen Sie diesen Wert. Geben Sie zusätzlich einen Ausdruck für den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ an.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Wir berechnen das Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-5) \cdot 1 \\ (-5) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 \\ -5-4 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

folgt nun laut Vorlesung, dass die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.
Weiter steht das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ per Definition orthogonal zu den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. □
(b) Da das Spatprodukt zyklisch ist, erhalten wir per Definition:

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle.$$

Mit dem berechneten Kreuzprodukt aus Aufgabenteil (a) gilt nun

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 7 \cdot 1 + (-9) \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7 - 18 + 3 = -8.$$

Da nun das Spatprodukt $\operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = -8 < 0$ ist, bilden die Vektoren $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ ein Linkssystem. Das Volumen V des von den drei Vektoren $\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ aufgespannten Spats beträgt per Definition:

$$V = |\operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)| = |-8| = 8.$$

□

(c) **Norm vom Kreuzprodukt**: Die Norm des Kreuzproduktes $F := \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$ beschreibt den Flächeninhalt F vom Parallelogramm, welches von den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt wird. Dieser Flächeninhalt F beträgt:

$$norm\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|7|^2 + |-9|^2 + |1|^2} = \sqrt{7^2 + 9^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 81 + 1} = \sqrt{131}.$$

Der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannten Parallelogramms beträgt nun

$$F = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{131}.$$

Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$: Die Berechnung des Winkels $\varphi \in [0, 2\pi)$ erfolgt mit folgender Beziehung zwischen dem Skalarprodukt und der Norm im euklidischen Raum:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \cos(\varphi).$$

Für den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen wir zuerst:

$$\|\vec{v}_1\|, \|\vec{v}_2\|, \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle.$$

Schritt 1. Normen von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ berechnen: Es gilt für die Norm vom Vektor $\vec{v}_1$:

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|2|^2 + |1|^2 + |-5|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 1 + 25} = \sqrt{30}.$$

Es gilt für die Norm vom Vektor $\vec{v}_2$:

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + |1|^2 + |2|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

Schritt 2. Skalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen: Es gilt für das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$\langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-5) \cdot 2 = 2 + 1 - 10 = -7.$$

Winkel φ zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen: Laut der anfangs erwähnten Beziehung im euklidischen Raum erhalten wir:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \cos(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\|} \Leftrightarrow \cos(\varphi) = \frac{-7}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{6}} \Leftrightarrow \cos(\varphi) = -\frac{7}{\sqrt{180}}$$
$$\Leftrightarrow \cos(\varphi) = -\frac{7}{6\sqrt{5}} \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{7}{6\sqrt{5}}\right).$$

Damit lautet der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ gerade

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{7}{6\sqrt{5}}\right) \approx 2,12 \approx 121,4^\circ$$

□

Aufgabe 2 (Eigenwertberechnung I)

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort, und falls ja, dann geben Sie auch eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an mit $A = SDS^{-1}$.

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_A aufstellen
Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 5 & 1-\lambda & 3 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)\cdot(1-\lambda) - 1\cdot(-1)\right) = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right) = (1-\lambda)\left((1-\mathrm{i}) - \lambda\right)\left((1+\mathrm{i}) - \lambda\right),$$

da gilt:

$$(1-\lambda)^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)^2 = -1 \;\Leftrightarrow\; 1-\lambda = \pm\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; 1 = \lambda \pm \mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1 \mp \mathrm{i}.$$

Schritt 2. Eigenwerte der Matrix A aufstellen
Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \;\Leftrightarrow\; p_A(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; (1-\lambda)\left((1-\mathrm{i}) - \lambda\right)\left((1+\mathrm{i}) - \lambda\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{1, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}.$$

Damit hat die Matrix A nun die drei Eigenwerte

$$\lambda_1 := 1,\ \lambda_2 := 1-\mathrm{i} \text{ und } \lambda_3 := 1+\mathrm{i},$$

mit jeweils algebraischer Vielfachheit $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ berechnen
Fall 1. $\lambda_1 = 1$: Der Eigenraum $E_A(-11)$ lautet:

$$E_A(1) = \ker(A - 1\cdot I_3) = \ker(A - I_n) = \ker\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 5 & 1-1 & 3 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 \mid \cdot(-1) \\ + \quad + \\ \cdot(-5) \end{matrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim(E_A(1)) = 1.$$

Fall 2. $\lambda_2 = 14$: Der Eigenraum $E_A(14)$ lautet:

$$E_A(1-\mathrm{i}) = \ker(A - (1-\mathrm{i})I_3) = \ker\begin{pmatrix} 1-(1-\mathrm{i}) & 0 & -1 \\ 5 & 1-(1-\mathrm{i}) & 3 \\ 1 & 0 & 1-(1-\mathrm{i}) \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1-1+\mathrm{i} & 0 & -1 \\ 5 & 1-1+\mathrm{i} & 3 \\ 1 & 0 & 1-1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 5 & \mathrm{i} & 3 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \cdot(-\mathrm{i}) \quad \cdot(-5) \end{matrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 3-5\mathrm{i} \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{1}{\mathrm{i}} \\ \end{matrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & \frac{3-5\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & -(5+3\mathrm{i}) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 5+3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim\left(E_A\left(1-\mathrm{i}\right)\right) = 1.$$

$\underline{\lambda_3 = 1+\mathrm{i}}$: Da $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und

$$\lambda_3 = 1+\mathrm{i} = \overline{1-\mathrm{i}} = \overline{\lambda}_2$$

ist, folgt nun

$$E_A\left(1+\mathrm{i}\right) = \overline{E_A\left(1-\mathrm{i}\right)} = \overline{\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 5+3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 5-3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

da $\overline{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$ und $\overline{5+3\mathrm{i}} = 5-3\mathrm{i}$ ist. Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_3:

$$m_3 := \dim\left(E_A\left(1+\mathrm{i}\right)\right) = 1.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = 1,$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 5+3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2 = 1-\mathrm{i},$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 5-3\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_3 = 1+\mathrm{i}.$$

(b) **Diagonalisierbarkeit der Matrix** A: Die Matrix A ist diagonalisierbar, da A eine 3×3-Matrix ist und drei paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1-\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = 1+\mathrm{i}$ hat. Für die Matrix A setzen wir die reguläre Matrix S:

$$S := \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 5+3\mathrm{i} & 5-3\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Für die Matrix A setzen wir die Diagonalmatrix D:

$$D := \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Damit gilt nun, dass die Matrix A ähnlich zu D ist, d.h.

$$A = SDS^{-1}.$$

$\square$

Aufgabe 3 (Eigenwertberechnung II)

Wir definieren den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$P_2 := \left\{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \text{Es existieren } a, b, c \in \mathbb{C} \text{ mit } p(x) = ax^2 + bx + c \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\right\}$$

der Polynome vom Grad höchstens 2, sowie die lineare Abbildung

$$D\colon P_2 \to P_2,\ D\left[p\right](x) := x^2 \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}(x) + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) \text{ für } p \in P_2, x \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie alle Eigenwerte der Abbildung D, sowie die zugehörigen Eigenfunktionen.

Lösung von Aufgabe 3

Schritt 1. Eigenwertbedingungen aufstellen
Sei $p(x) = ax^2 + bx + c \in P_2$, $x \in \mathbb{R}$, ein Polynom von höchstens Grad zwei. Dann ist p zweimal stetig differenzierbar mit den Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) = p'(x) = 2ax + b \text{ und } \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}(x) = p''(x) = 2a \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Eigenwertgleichung lautet nun:

$$\lambda p(x) = D\left[p\right](x) = x^2 \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}(x) + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) \ \Leftrightarrow\ \lambda\left(ax^2 + bx + c\right) \quad = x^2\left(2a\right) + x\left(2ax + b\right)$$

$$\Leftrightarrow\ a\lambda x^2 + b\lambda x + c\lambda = 2ax^2 + 2ax^2 + bx$$

$$\Leftrightarrow\ a\lambda x^2 + b\lambda x + c\lambda = 4ax^2 + bx.$$

Per Koeffizientenvergleich erhalten wir:

$$a\lambda x^2 + b\lambda x + c\lambda = 4ax^2 + bx \ \Leftrightarrow\ a\lambda = 4a,\ b\lambda = b \text{ und } c\lambda = 0.$$

Demnach haben wir drei Fälle:

$$a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ und } c \neq 0,$$

da wir den Fall $a = b = c = 0$ ausschließen können, weil sonst das Polynom p konstant null wäre und wir nur an Nicht-Null-Lösungen interessiert sind.
Schritt 2. Eigenwerte bestimmen
Fall 1. $a \neq 0$: Also folgt für λ:

$$a\lambda = 4a \ \Leftrightarrow\ \lambda = 4.$$

Damit folgt nun für b und c:

$$\begin{aligned} 4b = b\lambda = b \ &\Leftrightarrow\ 3b = 0 \ \Leftrightarrow\ b = 0, \\ 4c = c\lambda = 0 \ &\Leftrightarrow\ c = 0. \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir $a = 1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Also ist der erste Eigenwert von D gleich $\lambda_1 = 4$ mit der Eigenfunktion

$$\varphi_1(x) = 1 \cdot x^2 + 0x + 0 = x^2 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Fall 2. $b \neq 0$: Also folgt für λ:

$$b\lambda = b \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1.$$

Damit folgt nun für a und c:

$$\begin{aligned} a = 1 \cdot a = a\lambda = 4a \ &\Leftrightarrow\ 3a = 0 \ \Leftrightarrow\ a = 0, \\ c = c\lambda = 0 \ &\Leftrightarrow\ c = 0. \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir $b = 1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Also ist der zweite Eigenwert von D gleich $\lambda_2 = 1$ mit der Eigenfunktion

$$\varphi_2(x) = 0x^2 + 1 \cdot x + 0 = x \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Fall 3. $c \neq 0$: Also folgt für λ:

$$c\lambda = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 0.$$

Damit folgt nun für a und b:

$$\begin{aligned} 0 = 0 \cdot a = a\lambda = 4a \;&\Leftrightarrow\; a = 0, \\ 0 = 0 \cdot b = b\lambda = b \;&\Leftrightarrow\; b = 0. \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir $c = 1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist der dritte Eigenwert von D gleich $\lambda_3 = 0$ mit der Eigenfunktion

$$\varphi_3(x) = 0x^2 + 0x + 1 = 1 \text{ für } x \in \mathbb{R}.$$

Also besitzt die lineare Abbildung D drei paarweise verschiedene Eigenwerte

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1 \text{ und } \lambda_3 = 0$$

mit den dazugehörigen Eigenfunktionen:

$$\varphi_1(x) = x^2,\; \varphi_2(x) = x \text{ und } \varphi_3(x) = 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Eigenräume wären nun

$$\begin{aligned} E_D(4) &= \left\{x \mapsto ax^2 \mid a \in \mathbb{C}\right\} = \operatorname{lin}\{\varphi_1\}, \\ E_D(1) &= \{x \mapsto bx \mid b \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}\{\varphi_2\}, \\ E_D(0) &= \{x \mapsto c \mid c \in \mathbb{C}\} = \operatorname{lin}\{\varphi_3\}. \end{aligned}$$

$\square$