30.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Unitär Diagonalisierbar)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4+5\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A normal ist.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(c) Begründen Sie, dass die Matrix A unitär diagonalisierbar ist, d.h. es existiert eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $A = UDU^*$.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** Adjungierte Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ausrechnen
Es gilt für die adjungierte Matrix

$$A^* = \overline{A}^T = \overline{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4+5\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i} \end{pmatrix}}^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4-5\mathrm{i} & -4+4\mathrm{i} & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ -4+4\mathrm{i} & -5-4\mathrm{i} & -2+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2+2\mathrm{i} & -4-5\mathrm{i} & 4-4\mathrm{i} \\ -2+2\mathrm{i} & 0 & 4-4\mathrm{i} & -5-4\mathrm{i} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4-5\mathrm{i} & -4+4\mathrm{i} & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ -4+4\mathrm{i} & -5-4\mathrm{i} & -2+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2+2\mathrm{i} & -4-5\mathrm{i} & 4-4\mathrm{i} \\ -2+2\mathrm{i} & 0 & 4-4\mathrm{i} & -5-4\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Schritt 2. AA^* berechnen
Es gilt für das Produkt AA^*:

$$AA^* = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4+5\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4-5\mathrm{i} & -4+4\mathrm{i} & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ -4+4\mathrm{i} & -5-4\mathrm{i} & -2+2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2+2\mathrm{i} & -4-5\mathrm{i} & 4-4\mathrm{i} \\ -2+2\mathrm{i} & 0 & 4-4\mathrm{i} & -5-4\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4,$$

da $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.
Schritt 3. A^*A berechnen
Wegen
$$AA^* = I_4$$
erhalten wir direkt, dass
$$A^* = A^{-1}$$
ist (dies heißt auch, dass die Matrix A unitär ist). Damit gilt nun:
$$A^*A = A^{-1}A = I_4.$$

Schritt 4. AA^* und A^*A vergleichen
Es gilt nun:
$$AA^* = I_4 = A^*A,$$
d.h. die Matrix A ist normal. Dies war zu zeigen. □

(b) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_A aufstellen
Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da die Determinantenabbildung det multilinear ist:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_4) = \det\left(\frac{1}{9}(9A - 9\lambda I_4)\right) = \left(\frac{1}{9}\right)^4 \det(9A - 9\lambda I_4) \\ &= \frac{1}{9^4}\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i}-9\lambda & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da Zeilenumformungen den Wert der Determinante nicht ändern:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \frac{1}{9^4}\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i}-9\lambda & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9^4}\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ -8+10\mathrm{i}-18\lambda & -10-10\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i}-9\lambda & 0 \\ -10+8\mathrm{i}-18\lambda & -8-8\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} & -9-9\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9^4}\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 18\mathrm{i}-18\lambda & -18\mathrm{i}+18\lambda & 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 \\ -18-18\lambda & -18-18\lambda & 0 & -9-9\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da die Determinantenabbildung det multilinear ist:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \frac{1}{9^4}\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 18\mathrm{i}-18\lambda & -18\mathrm{i}+18\lambda & 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 \\ -18-18\lambda & -18-18\lambda & 0 & -9-9\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9^4}\cdot(9\mathrm{i}-9\lambda)\cdot((-9)-9\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{9^2}\cdot(\mathrm{i}-\lambda)\cdot((-1)-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da Zeilenumformungen den Wert der Determinante nicht ändern:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\begin{vmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\lambda & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\lambda & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\begin{vmatrix} 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9-9\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der vierten Spalte:

$$p_A(\lambda) = \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\begin{vmatrix} 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9-9\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -9-9\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der dritten Spalte:

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &= \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -9-9\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)\cdot((-1)-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 9\mathrm{i}-9\lambda & 0 \\ 0 & -9-9\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\cdot((9\mathrm{i}-9\lambda)\cdot((-9)-9\lambda)-0\cdot 0) \\
&= \frac{1}{9^2}(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)\cdot(9\cdot 9\cdot(\mathrm{i}-\lambda)\cdot((-1)-\lambda)-0) = (\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda)(\mathrm{i}-\lambda)((-1)-\lambda) \\
&= ((-1)-\lambda)^2(\mathrm{i}-\lambda)^2.
\end{aligned}$$

Schritt 2. Eigenwerte der Matrix A aufstellen
Eigenwerte der Matrix A: Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \;\Leftrightarrow\; p_A(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; ((-1)-\lambda)^2(\mathrm{i}-\lambda)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{-1, \mathrm{i}\}.$$

Damit hat die Matrix A nun zwei Eigenwerte

$$\lambda_1 := -1 \text{ und } \lambda_2 := \mathrm{i},$$

wobei beide jeweils doppelte Eigenwerte (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_1 = k_2 = 2$) der Matrix A sind.
Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ berechnen
Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 der Matrix A:
Fall 1. $\lambda_1 = -1$: Der Eigenraum $E_A(-1)$ lautet, da dieser ein Untervektorraum des $\mathbb{C}^4$ ist:

$$\begin{aligned}
E_A(-1) &= \ker(A-(-1)\cdot I_4) = \ker(A+I_4) = \ker(9A+9I_4) \\
&= \ker\begin{pmatrix} -4+5\mathrm{i}+9 & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}+9 & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i}+9 & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}+9 \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 5+5\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & 5+5\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 5(1+\mathrm{i}) & -4(1+\mathrm{i}) & 0 & -2(1+\mathrm{i}) \\ -4(1+\mathrm{i}) & 4(1+\mathrm{i}) & -2(1+\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & -2(1+\mathrm{i}) & 5(1+\mathrm{i}) & 4(1+\mathrm{i}) \\ -2(1+\mathrm{i}) & 0 & 4(1+\mathrm{i}) & 4(1+\mathrm{i}) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot\frac{1}{1+\mathrm{i}} \\ \mid\cdot\left(\frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\right) \\ \mid\cdot\frac{1}{1+\mathrm{i}} \\ \mid\cdot\frac{1}{1+\mathrm{i}} \end{array} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 5 & 0 & -10 & -10 \\ -2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{array}
\end{aligned}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

da

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 5-4 \\ 2-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim \left(E_A \left(-1 \right) \right) = 2.$$

<u>Fall 2. $\lambda_2 = \mathrm{i}$:</u> Der Eigenraum $E_A(\mathrm{i})$ lautet, da dieser ein Untervektorraum des $\mathbb{C}^4$ ist:

$$\begin{aligned}
E_A(\mathrm{i}) &= \ker \left(A - \mathrm{i} I_4 \right) = \ker \left(9A - 9\mathrm{i} I_3 \right) \\
&= \ker \begin{pmatrix} -4+5\mathrm{i}-9\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4+5\mathrm{i}-9\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5+4\mathrm{i}-9\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -4-4\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ -4-4\mathrm{i} & -5-5\mathrm{i} & -2-2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -2-2\mathrm{i} & -4-4\mathrm{i} & 4+4\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 4+4\mathrm{i} & -5-5\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -4(1+\mathrm{i}) & -4(1+\mathrm{i}) & 0 & -2(1+\mathrm{i}) \\ -4(1+\mathrm{i}) & -5(1+\mathrm{i}) & -2(1+\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & -2(1+\mathrm{i}) & -4(1+\mathrm{i}) & 4(1+\mathrm{i}) \\ -2(1+\mathrm{i}) & 0 & 4(1+\mathrm{i}) & -5(1+\mathrm{i}) \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \left(-\frac{1}{2(1+\mathrm{i})} \right) \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{1+\mathrm{i}} \right) \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{2(1+\mathrm{i})} \right) \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{1+\mathrm{i}} \right) \end{matrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

da

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+4 \\ 4-4 \\ 0+2 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim \left(E_A \left(\mathrm{i} \right) \right) = 2.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda_1 = -1,$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda_2 = \mathrm{i}.$$

(c) **Schritt 4.** Normen der Eigenvektoren ausrechnen

Norm von $\vec{v}_1$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_1$:

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |2|^2 + |-2|^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{0+1+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Norm von $\vec{v}_2$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_2$:

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|2|^2 + |2|^2 + |0|^2 + |1|^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+0+1} = \sqrt{9} = 3.$$

Norm von $\vec{v}_3$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_3$:

$$\|\vec{v}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|2|^2 + |-2|^2 + |1|^2 + |0|^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4+4+1+0} = \sqrt{9} = 3.$$

Norm von $\vec{v}_4$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_4$:

$$\|\vec{v}_4\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|-1|^2 + |0|^2 + |2|^2 + |2|^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1+0+4+4} = \sqrt{9} = 3.$$

Schritt 5. Unitäre Diagonalisierbarkeit

Die Matrix A ist unitär diagonalisierbar, da die Matrix A normal ist. Für die Matrix A setzen wir die unitäre Matrix U:

$$\begin{aligned} U &:= \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 & \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 & \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 & \frac{1}{\|\vec{v}_4\|}\vec{v}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\vec{v}_1 & \frac{1}{3}\vec{v}_2 & \frac{1}{3}\vec{v}_3 & \frac{1}{3}\vec{v}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 & \vec{v}_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \end{aligned}$$

Für die Matrix A setzen wir die Diagonalmatrix D:

$$D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4},$$

da $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = \mathrm{i}$ doppelte Eigenwerte sind. Damit gilt nun, dass die Matrix A (unitär) ähnlich zu D ist, d.h.

$$A = UDU^{-1} = UDU^*,$$

da die Matrix A unitär ist, d.h. es ist $U^* = U^{-1}$. □

Aufgabe 2 (Jordan-Normalform)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Warum ist die Matrix A nicht diagonalisierbar? Bestimmen Sie die (komplexe) Jordan-Normalform $J \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ der Matrix A und geben Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $J = S^{-1}AS$ an.

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_A aufstellen
Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 + 0 = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ laut der Regel von Sarrus:

$$p_A(\lambda) = (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-\lambda)\left(((-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(-\lambda) + 0\cdot(-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 0\cdot 1 - 1\cdot(-\lambda)\cdot(-2) - 1\cdot(-1)\cdot(-\lambda) - (-\lambda)\cdot 0\cdot 0\right)$$
$$-\left((1\cdot(-\lambda)\cdot(-\lambda) + 0\cdot(-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot(-\lambda)\cdot(-2) - 1\cdot(-1)\cdot 1 - (-\lambda)\cdot 1\cdot 0\right)$$
$$= (-\lambda)\left(-\lambda^3 + 0 + 0 - 2\lambda - \lambda - 0\right) - \left(\lambda^2 + 0 - 2 - 0 + 1 - 0\right) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2$$
$$= \left(((-\mathrm{i}) - \lambda)(\mathrm{i} - \lambda)\right)^2 = ((-\mathrm{i}) - \lambda)^2 (\mathrm{i} - \lambda)^2,$$

da wir z.B. laut der Mitternachtsformel

$$0 = \lambda^2 + 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{0 \pm \sqrt{0-4}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{\pm 2\mathrm{i}}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \pm\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; \lambda = -\mathrm{i} \text{ oder } \lambda = \mathrm{i}$$

haben.
Schritt 2. Eigenwerte der Matrix A aufstellen
Eigenwerte der Matrix A: Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \;\Leftrightarrow\; p_A(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; ((-\mathrm{i}) - \lambda)^2 (\mathrm{i} - \lambda)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \in \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}.$$

Damit hat die Matrix A nun zwei Eigenwerte

$$\lambda_1 := -\mathrm{i} \text{ und } \lambda_2 := \mathrm{i},$$

wobei $\lambda_1 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = \mathrm{i}$ einfache Eigenwerte (d.h. für die algebraische Vielfachheiten gilt $k_1 = k_2 = 1$) der Matrix A sind.

Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ berechnen
Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 der Matrix A:
Fall 1. $\lambda_1 = -\mathrm{i}$: Der Eigenraum $E_A(-\mathrm{i})$ lautet:

$$E_A(-\mathrm{i}) = \ker(A - (-\mathrm{i})\, I_4) = \ker(A + \mathrm{i} I_4) = \ker \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -2 \\ 0 & -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \; \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \qquad = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim(E_A(-\mathrm{i})) = 1.$$

Fall 2. $\lambda_2 = \mathrm{i}$: Wegen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und

$$\lambda_2 = \mathrm{i} = \overline{-\mathrm{i}} = \overline{\lambda}_1$$

folgt für den Eigenraum $E_A(\mathrm{i})$:

$$E_A(\mathrm{i}) = \overline{E_A(-\mathrm{i})} = \overline{\operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim(E_A(\mathrm{i})) = 1.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = -\mathrm{i},$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda_2 = \mathrm{i}.$$

(b) **Nicht-Diagonalisierbarkeit**: Die Matrix A ist nun nicht diagonalisierbar, da z.B. für den Eigenwert $\lambda_1 = -\mathrm{i}$ die algebraische Vielfachheit $k_1 = 2$ nicht mit der geometrischen Vielfachheit $m_1 = 1$ übereinstimmt, genauer:

$$m_1 = 1 < 2 = k_1.$$

Schritt 4. Haupträume bestimmen
Fall 1. $\lambda_1 = -\mathrm{i}$: Dazu berechnen wir:

$$(A - (-\mathrm{i})\, I_4)^2 = (A + \mathrm{i} I_4)^2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} + 1\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot 1 + 1\cdot\mathrm{i} & 0 & 1\cdot(-2) \\ 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 1\cdot 1 + \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} + (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot(-2) + (-2)\cdot\mathrm{i} \\ 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} + (-1)\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot(-1) + (-1)\cdot\mathrm{i} \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 1\cdot(-1) + \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+1 & \mathrm{i}+\mathrm{i} & 0 & -2 \\ \mathrm{i}+\mathrm{i} & 1-1-2 & -2 & -2\mathrm{i}-2\mathrm{i} \\ \mathrm{i}+\mathrm{i} & 1-1 & -1-1 & -\mathrm{i}-\mathrm{i} \\ 1+1 & \mathrm{i}+\mathrm{i} & \mathrm{i}+\mathrm{i} & -2-1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i} & 0 & -2 \\ 2\mathrm{i} & -2 & -2 & -4\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 & -2 & -2\mathrm{i} \\ 2 & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & -1 & -2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} .$$

Nun gilt für den ersten Hauptraum $H_A^{(1)}(-\mathrm{i})$, da dies ein Untervektorraum des $\mathbb{C}^4$ ist:

$$H_A^{(1)}(-\mathrm{i}) = \ker (A - (-\mathrm{i})\, I_4)^2 = \ker \left(2 \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & -1 & -2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ \mathrm{i} & -1 & -1 & -2\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-1) \\ \mid \cdot (-\mathrm{i}) \\ \\ \end{array} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit entspricht nun die Dimension des ersten Hauptraums von $\lambda_1 = -\mathrm{i}$ der algebraischen Vielfachheit vom Eigenwert $\lambda_1 = -\mathrm{i}$, genauer:

$$\dim \left(H_A^{(1)}(-\mathrm{i}) \right) = 2 = k_1 .$$

Fall 2. $\lambda_2 = \mathrm{i}$: Wegen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und

$$\lambda_2 = \mathrm{i} = \overline{-\mathrm{i}} = \overline{\lambda}_1$$

folgt für den Hauptraum $H_A^{(1)}(\mathrm{i})$:

$$H_A^{(1)}(\mathrm{i}) = \overline{H_A^{(1)}(-\mathrm{i})} = \overline{\operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Damit entspricht nun die Dimension des ersten Hauptraums von $\lambda_2 = \mathrm{i}$ der algebraischen Vielfachheit vom Eigenwert $\lambda_2 = \mathrm{i}$, genauer:

$$\dim \left(H_A^{(1)}(\mathrm{i}) \right) = 2 = k_2 .$$

Schritt 5. Aufstellen der Matrix S
Wähle

$$\vec{w}_2 \in \ker (A - \lambda_1 I_4)^2 \setminus \ker (A - \lambda_1 I_4) = H_A^{(1)}(-\mathrm{i}) \setminus E_A(-\mathrm{i})$$

und setze dann

$$\vec{w}_1 := (A - \lambda_1 I_4)\, \vec{w}_2 \in E_A(-\mathrm{i}) .$$

Zum Beispiel:

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_A^{(1)}(-\mathrm{i}) \setminus E_A(-\mathrm{i}) ,$$

dann ist

$$\vec{w}_1 = (A - \lambda_1 I_4)\, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i}) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot(-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 \\ 1\cdot(-\mathrm{i}) + 0\cdot 0 + \mathrm{i}\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 0\cdot(-\mathrm{i}) + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + \mathrm{i}\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0+0 \\ -\mathrm{i}+0+0+0 \\ -\mathrm{i}+0+\mathrm{i}+0 \\ 0+0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 \in E_A(-\mathrm{i}) .$$

Fall 2. $\lambda_2 = \mathrm{i}$: Wähle

$$\vec{w}_4 \in \ker\left(A - \lambda_2 I_4\right)^2 \setminus \ker\left(A - \lambda_2 I_4\right) = H_A^{(1)}\left(\mathrm{i}\right) \setminus E_A\left(\mathrm{i}\right)$$

und setze dann

$$\vec{w}_3 := \left(A - \lambda_2 I_4\right) \vec{w}_4 \in E_A\left(\mathrm{i}\right).$$

Zum Beispiel:

$$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_A^{(1)}\left(\mathrm{i}\right) \setminus E_A\left(\mathrm{i}\right),$$

dann ist

$$\vec{w}_3 = \left(A - \lambda_2 I_4\right) \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot \mathrm{i} + (-\mathrm{i}) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \\ 1 \cdot \mathrm{i} + 0 \cdot 0 + (-\mathrm{i}) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 0 \cdot \mathrm{i} + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-\mathrm{i}) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 + 0 \\ \mathrm{i} + 0 + 0 + 0 \\ \mathrm{i} + 0 - \mathrm{i} + 0 \\ 0 + 0 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 \in E_A\left(\mathrm{i}\right).$$

Für die Matrix A setzen wir die reguläre Matrix S:

$$S := \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 & \vec{w}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}.$$

Schritt 6. Die Jordanmatrix J aufstellen
Da die geometrische Vielfachheit stets gleich Eins ist ($m_1 = m_2 = 1$) gibt es jeweils nur einen Jordanblock, also sehen diese wie folgt aus:

$$J_1 := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$
$$J_2 := \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Demnach ergibt sich für die Jordanmatrix J:

$$J := \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Schritt 7. Zusammenfassen
Damit besitzt nun die Matrix A die komplexe Jordan-Normalform J, d.h. es gilt:

$$A = SJS^{-1}.$$

□

Aufgabe 3 (Definitheit von symmetrischen Matrizen)

Gegeben sei die Matrix

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ für } t \in \mathbb{R}.$$

(a) Begründen Sie, dass die Matrix $A(t)$ symmetrisch ist für alle $t \in \mathbb{R}$.

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A(t)$ eine symmetrisch positiv definite Matrix? Was für ein Typ an Definitheit bzw. Indefinitheit liegt in den anderen Fällen vor?

Lösung von Aufgabe 3

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt:

$$A(t)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{pmatrix} = A(t),$$

d.h. die Matrix $A(t)$ ist symmetrisch. □

(b) Für positive Definitheit der symmetrischen Matrix A muss nun nach dem Satz von Hurwitz gelten:

<u>Fall 1. $m = 1$</u>: Es gilt:

$$\det(a_{11}) = \det(1) = 1 > 0.$$

<u>Fall 2. $m = 2$</u>: Es gilt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1\cdot 2 - 1\cdot 1 = 2 - 1 = 1 > 0.$$

<u>Fall 3. $m = 3$</u>: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \det(A(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t \\ 1 & t & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot t\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot t - 1\cdot 2\cdot 1 - t\cdot t\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 1 \\ &= 6 + t + t - 2 - t^2 - 3 = -t^2 + 2t + 1 = \left(\left(1-\sqrt{2}\right) - t\right)\left(\left(1+\sqrt{2}\right) - t\right) =: q(t), \end{aligned}$$

da wir z.B. laut der Mitternachtsformel

$$0 = -t^2 + 2t + 1 \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{-2\pm\sqrt{8}}{-2} \Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow t = 1 \mp \sqrt{2} \Leftrightarrow t = 1-\sqrt{2} \text{ oder } t = 1+\sqrt{2}$$

haben. Weiter ist $q(0) = -0^2 + 2\cdot 0 + 1 = -0 + 0 + 1 = 1 > 0$ und $0 \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$, daher ist auch $q(t) = \det(A(t)) > 0$ für alle $t \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$. Da q eine noch unten geöffnete Parabel ist, folgt für alle $t \in \mathbb{R}\setminus\left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$, dass $q(t) = \det(A) < 0$. Nach dem Satz von Hurwitz folgt nun:

- $t \in \left(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right)$: $A(t)$ ist positiv definit.
- $t \in \mathbb{R}\setminus\left[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right]$: $A(t)$ ist indefinit, da $\det(a_{11}) > 0$ und $\det(A(t)) < 0$ ist.
- $t \in \left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$: Keine Aussage, da $q(t) = \det(A(t)) = 0$.

<u>Extrafall $t \in \left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$</u>: Für das charakteristische Polynom gilt nach der Regel von Sarrus:

$$p_{A(t)}(\lambda) = \det(A(t) - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & t \\ 1 & t & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(3-\lambda) + 1\cdot t\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot t - 1\cdot(2-\lambda)\cdot 1 - t\cdot t\cdot(1-\lambda) - (3-\lambda)\cdot 1\cdot 1\\
&= \left(2-2\lambda-\lambda+\lambda^2\right)(3-\lambda) + t + t - (2-\lambda) - t^2(1-\lambda) - (3-\lambda)\\
&= \left(2-3\lambda+\lambda^2\right)(3-\lambda) + 2t - 2 + \lambda - t^2 + t^2\lambda - 3 + \lambda\\
&= 6 - 9\lambda + 3\lambda^2 - 2\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2t - 5 - t^2 + \left(t^2+2\right)\lambda\\
&= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + \left(t^2+2-11\right)\lambda + q(t)\\
&= \lambda\left(-\lambda^2+6\lambda+t^2-9\right) + 0 = (0-\lambda)\left((3-|t|)-\lambda\right)\left((3+|t|)-\lambda\right),
\end{aligned}
$$

da wir z.B. laut der Mitternachtsformel

$$
0 = -\lambda^2 + 6\lambda + t^2 - 9 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot(-1)\cdot(t^2-9)}}{2\cdot(-1)} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-6\pm\sqrt{36+4t^2-36}}{-2}
$$

$$
\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-6\pm\sqrt{4t^2}}{-2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-6\pm 2|t|}{-2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 3 \mp |t| \Leftrightarrow\; \lambda = 3-|t| \text{ oder } \lambda = 3+|t|
$$

haben. Es gilt für die Eigenwerte von $A(t)$:

$$
\lambda\in\mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A(t) \;\Leftrightarrow\; p_{A(t)}(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; (0-\lambda)\left((3-|t|)-\lambda\right)\left((3+|t|)-\lambda\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda\in\{0, 3-|t|, 3+|t|\}.
$$

Damit hat die Matrix $A(t)$ die drei Eigenwerte

$$
\lambda_1 := 0,\ \lambda_2 := 3-|t| \text{ und } \lambda_3 := 3+|t|.
$$

Aus

$$
|t| \le 1+\sqrt{2}
$$

folgt

$$
\lambda_2 = 3-|t| \ge 3-\left(1+\sqrt{2}\right) = 3-1-\sqrt{2} > 2-\sqrt{4} = 2-2 = 0.
$$

Weiter ist

$$
\lambda_3 = 3+|t| \ge 3+0 = 3 > 0
$$

und

$$
\lambda_1 = 0 \ge 0.
$$

Also sind in diesen Fällen alle Eigenwerte nicht-negativ, d.h. die Matrix $A(t)$ ist für $t \in \left\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right\}$ positiv semidefinit. $\square$