09.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Übungsblatt
(wird am Mittwoch, den 13.05.2020 besprochen)

Aufgabe 1 (Konvergenz & Divergenz von Eigenwerten bzw. -vektoren)

Gegeben sei die Matrix

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ für } \varepsilon > 0.$$

(a) Berechnen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ die Eigenwerte zur Matrix A_ε und die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Untersuchen Sie die Matrix A_ε, die Eigenwerte und die Eigenvektoren auf Konvergenz für $\varepsilon \to 0^+$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus(0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus(0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{und } h(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus(0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion g stetig ist auf $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Funktion g stetig längs jeder Geraden im Punkt $(0,0)$ ist, d.h. es soll für alle Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{r\to 0^+} g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = g(0,0)$$

gelten.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion h stetig ist auf $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} h(x,y)\right) \text{ und } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} h(x,y)\right)$$

existieren und geben Sie die Grenzwerte an.

Aufgabe 3 (Raumkurven, Längen & Natürliche Parametrisierung)

(a) Gegeben sei die Raumkurve

$$\gamma_1 \colon \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Länge $L(\gamma_1)$ von der Kurve γ_1. Parametrisieren Sie die Kurve γ_1 bzgl. der Bogenlänge.

(b) Gegeben sei die Raumkurve

$$\gamma_2 \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \varphi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Berechnen Sie die Länge $L(\gamma_2)$ von der Kurve γ_2.