09.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Konvergenz & Divergenz von Eigenwerten bzw. -vektoren)

Gegeben sei die Matrix

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ für } \varepsilon > 0.$$

(a) Berechnen Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ die Eigenwerte zur Matrix A_ε und die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Untersuchen Sie die Matrix A_ε, die Eigenwerte und die Eigenvektoren auf Konvergenz für $\varepsilon \to 0^+$.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_{A_ε} aufstellen
Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} p_{A_\varepsilon}(\lambda) = \det(A_\varepsilon - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda\right)\cdot\left(1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda\right) - \left(-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\left(-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\varepsilon^2\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\lambda+\varepsilon\lambda\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\lambda^2-\varepsilon^2\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ &= \lambda^2-2\lambda+1-\varepsilon^2\left(\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) = \lambda^2-2\lambda+1-\varepsilon^2\cdot 1 = \lambda^2-2\lambda+\left(1-\varepsilon^2\right), \end{aligned}$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi\in\mathbb{R}.$$

Nach der Mitternachtsformel haben wir, da $\varepsilon > 0$ ist:

$$\lambda^2-2\lambda+\left(1-\varepsilon^2\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(1-\varepsilon^2)}}{2\cdot 1} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4-4+4\varepsilon^2}}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{2\pm\sqrt{4\varepsilon^2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{2\pm 2|\varepsilon|}{2} \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1\pm\varepsilon \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1-\varepsilon \text{ oder } \lambda = 1+\varepsilon.$$

Damit folgt nun für das charakteristische Polynom p_{A_ε}:

$$p_{A_\varepsilon}(\lambda) = \lambda^2-2\lambda+\left(1-\varepsilon^2\right) = ((1-\varepsilon)-\lambda)((1+\varepsilon)-\lambda)$$

für alle $\lambda\in\mathbb{C}$. **Schritt 2.** Eigenwerte λ_1, λ_2 von A_ε aufstellen
Es gilt:

$$\lambda\in\mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A_\varepsilon \;\Leftrightarrow\; p_{A_\varepsilon}(\lambda)=0 \;\Leftrightarrow\; ((1-\varepsilon)-\lambda)((1+\varepsilon)-\lambda)=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda\in\{1-\varepsilon, 1+\varepsilon\}.$$

Damit hat die Matrix A_ε die zwei Eigenwerte

$$\lambda_1(\varepsilon) := 1-\varepsilon,\ \ \lambda_2(\varepsilon) := 1+\varepsilon$$

mit algebraischen Vielfachheiten

$$k_1 = k_2 = 1.$$

Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ berechnen
$\underline{\lambda_1(\varepsilon) = 1-\varepsilon}$: Der Eigenraum $E_{A_\varepsilon}\left(1-\varepsilon\right)$ lautet:

$$\begin{aligned}
E_{A_\varepsilon}\left(1-\varepsilon\right) &= \ker\left(A_\varepsilon - (1-\varepsilon)\cdot I_2\right) = \ker\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - (1-\varepsilon) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-(1-\varepsilon)\end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - 1+\varepsilon & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-1+\varepsilon\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} \varepsilon\left(1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \varepsilon\left(1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot\frac{1}{\varepsilon} \\ \mid\cdot\frac{1}{\varepsilon}\end{array} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\underline{\lambda_1(\varepsilon) = 1-\varepsilon}$: Der Eigenraum $E_{A_\varepsilon}\left(1-\varepsilon\right)$ lautet:

$$\begin{aligned}
E_{A_\varepsilon}\left(1+\varepsilon\right) &= \ker\left(A_\varepsilon - (1+\varepsilon)\cdot I_2\right) = \ker\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - (1+\varepsilon) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-(1+\varepsilon)\end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - 1-\varepsilon & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-1-\varepsilon\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -\varepsilon\left(1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\left(1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ \mid\cdot\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\end{array} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir machen nun für die weitere Berechnung eine Fallunterscheidung.
$\underline{\text{Fall 1. } 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) = 0}$: Damit folgt nun:

$$1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) = -1$$

und in diesem Fall auch

$$\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) = 0.$$

In diesem Fall ist:

$$E_{A_\varepsilon}\left(1-\varepsilon\right) = \ker\begin{pmatrix} 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid\cdot\frac{1}{2}\end{array} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Sowie andererseits:

$$E_{A_\varepsilon}\left(1+\varepsilon\right) = \ker\begin{pmatrix} 1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Wir haben in diesem Fall gezeigt:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1(\varepsilon) = 1-\varepsilon, \\
\vec{v}_2(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2(\varepsilon) = 1+\varepsilon.
\end{aligned}$$

$\underline{\text{Fall 2. } 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \neq 0}$:
In diesem Fall ist:

$$\begin{aligned}
E_{A_\varepsilon}\left(1-\varepsilon\right) &= \ker\begin{pmatrix} 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\ \\ \end{array} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ + \end{array} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix}\right\},
\end{aligned}$$

denn es gilt nach der dritten binomischen Formel:

$$1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\left(-\frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}\right)\cdot\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)=\frac{\left(1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\left(1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}-\frac{\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=\frac{1^2-\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}$$
$$=\frac{1-\left(\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=\frac{1-1}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=\frac{0}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=0,$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1 \text{ für alle } \varphi\in\mathbb{R}.$$

Sowie andererseits:

$$E_{A_\varepsilon}(1+\varepsilon)=\ker\begin{pmatrix}1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\\ \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}\end{matrix}=\ker\begin{pmatrix}1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & \sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\\ \frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}+\\ \cdot\left(-\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\end{matrix}$$
$$=\ker\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)} & 1\end{pmatrix}=\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix}\right\},$$

denn es gilt nach der dritten binomischen Formel:

$$1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\frac{\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}\cdot\left(-\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)=\frac{\left(1-\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)\cdot\left(1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}-\frac{\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=\frac{1^2-\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)-\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}$$
$$=\frac{1-\left(\sin^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)+\cos^2\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=\frac{1-1}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=\frac{0}{1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)}=0,$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1 \text{ für alle } \varphi\in\mathbb{R}.$$

Wir haben in diesem Fall gezeigt:

$$\vec{v}_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\\ 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1(\varepsilon)=1-\varepsilon,$$
$$\vec{v}_2(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2(\varepsilon)=1+\varepsilon.$$

□

(b) **Konvergenz von** $(A_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$:
Wir identifizieren den Matrizenraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit dem euklidischen Raum $\mathbb{R}^{2\cdot 2}=\mathbb{R}^4$, daher untersuchen wir die einzelnen Einträge der Matrix A_ε, $\varepsilon>0$, auf Konvergenz. Es gilt wegen $\sin(\varphi),\cos(\varphi)\in[-1,1]$ für alle $\varphi\in\mathbb{R}$:

$$0\leq\left|\left(1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-1\right|=|\varepsilon|\left|\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right|\leq|\varepsilon|\cdot 1=\varepsilon\to 0,$$
$$0\leq\left|\left(1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-1\right|=|\varepsilon|\left|\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right|\leq|\varepsilon|\cdot 1=\varepsilon\to 0,$$
$$0\leq\left|\left(-\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right)-0\right|=|\varepsilon|\left|\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right|\leq|\varepsilon|\cdot 1=\varepsilon\to 0$$

für $\varepsilon\to 0^+$. Dies liefert uns die Konvergenz:

$$A_\varepsilon=\begin{pmatrix}1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2 \text{ für } \varepsilon\to 0^+.$$

Konvergenz von $(\lambda_1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$:
Für $\varepsilon\to 0^+$ gilt:

$$\lambda_1(\varepsilon)=1-\varepsilon\to 1-0=1=:\lambda_1(0).$$

Konvergenz von $(\lambda_2(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$:
Für $\varepsilon\to 0^+$ gilt:

$$\lambda_2(\varepsilon)=1+\varepsilon\to 1+0=1=:\lambda_2(0).$$

Divergenz von $(\vec{v}_1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$, $(\vec{v}_2(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$:
Setze dazu $\varepsilon_n := \frac{4}{(2n-1)\pi}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\varepsilon_n = \frac{4}{(2n-1)\,\pi} > 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$\varepsilon_n = \frac{4}{(2n-1)\,\pi} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Weiter gilt nun:

$$\cos\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) = 0,$$
$$\sin\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) = \sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) = (-1)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) = 1+0 = 1 \neq 0$, d.h. wir sind in Fall 2. Wir erhalten somit für die Eigenvektoren:

$$\vec{v}_1(\varepsilon_n) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) \\ 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{v}_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1+\cos\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) \\ -\sin\left(\frac{2}{\varepsilon_n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die beiden Folgen $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ divergieren, müssen auch die Folgen der Eigenvektoren $(\vec{v}_1(\varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $(\vec{v}_2(\varepsilon_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ divergieren. $\square$
Zusammengefasst:

- Matrix: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} A_\varepsilon = I_2 =: A_0$
- Eigenwerte: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \lambda_1(\varepsilon) = 1 = \lambda_1(0)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \lambda_2(\varepsilon) = 1 = \lambda_2(0)$.
- Weiter ist $\lambda = 1$ ein doppelter Eigenwert der Matrix $A_0 = I_2$.
- Eigenvektoren: $(\vec{v}_1(\varepsilon))_{\varepsilon>0}, (\vec{v}_2(\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ divergieren.

Aufgabe 2 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{und } h(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion g stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Funktion g stetig längs jeder Geraden im Punkt $(0,0)$ ist, d.h. es soll für alle Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\lim_{r \to 0^+} g(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = g(0,0)$$

gelten.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion h stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} h(x,y) \right) \text{ und } \lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} h(x,y) \right)$$

existieren und geben Sie die Grenzwerte an.

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Stetigkeit in $(0,0)$
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$0 \le |f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{xy^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{|xy^2|}{|x^2+y^2|} = \frac{|x|\,|y^2|}{x^2+y^2} = \frac{|x|\,y^2}{x^2+y^2} \le \frac{|x|\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x|.$$

Also folgt für $(x,y) \to (0,0)$:

$$0 \le |f(x,y) - f(0,0)| \le |x| \to |0| = 0,$$

da die Betragsfunktion $|\cdot|$ ist. Also ist die Funktion f stetig im Punkt $(0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2$
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist. □

(b) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $g|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Unstetigkeit in $(0,0)$
Setze dazu

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (0,0).$$

Weiter haben wir nun für $n \to \infty$:

$$g(x_n, y_n) = g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n} \right) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{2}{n^4}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \ne 0 = g(0,0).$$

Damit ist die Funktion g unstetig im Punkt $(0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit längs Geraden in $(0,0)$
Es gilt für alle Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$ und allen Radien $r>0$:

$$g\left(r\cos\left(\varphi\right), r\sin\left(\varphi\right)\right) = \frac{r\cos\left(\varphi\right)\cdot\left(r\sin\left(\varphi\right)\right)^2}{\left(r\cos\left(\varphi\right)\right)^2 + \left(r\sin\left(\varphi\right)\right)^4} = \frac{r\cos\left(\varphi\right)\cdot r^2\sin^2\left(\varphi\right)}{r^2\cos^2\left(\varphi\right)+r^4\sin^4\left(\varphi\right)} = \frac{r\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{\cos^2\left(\varphi\right)+r^2\sin^4\left(\varphi\right)}.$$

Sei nun der Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$ fest. Dies führt zu einer Fallunterscheidung.
<u>Fall 1. $\cos(\varphi)=0$:</u> Dann ist $\sin(\varphi) \in \{-1,1\}$, d.h. $\sin^2(\varphi)=1$. In diesem Fall folgt nun für $r\to 0^+$:

$$0 \leq \left|g\left(r\cos\left(\varphi\right), r\sin\left(\varphi\right)\right) - g\left(0,0\right)\right| = \left|\frac{r\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{\cos^2\left(\varphi\right)+r^2\sin^4\left(\varphi\right)}\right| = \frac{r\cdot 0\cdot 1}{0^2+r^2\cdot 1^2} = \frac{0}{0+r^2\cdot 1} = 0 \to 0.$$

<u>Fall 2. $\cos(\varphi)\neq 0$:</u> In diesem Fall folgt nun für $r\to 0^+$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|g\left(r\cos\left(\varphi\right), r\sin\left(\varphi\right)\right) - g\left(0,0\right)\right| &= \left|\frac{r\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{\cos^2\left(\varphi\right)+r^2\sin^4\left(\varphi\right)}\right| = \frac{r\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{\cos^2\left(\varphi\right)+r^2\sin^4\left(\varphi\right)} \\ \to \frac{0\cdot\cos\left(\varphi\right)\sin^2\left(\varphi\right)}{\cos^2\left(\varphi\right)+0^2\sin^4\left(\varphi\right)} &= \frac{0}{\cos^2\left(\varphi\right)+0\cdot\sin^4\left(\varphi\right)} = \frac{0}{\cos^2\left(\varphi\right)+0} = \frac{0}{\cos^2\left(\varphi\right)} = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe beider Fälle haben wir nun gezeigt, dass die Funktion g stetig **längs aller Geraden** in $(0,0)$ ist. □
(c) (a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
Die Funktion $h|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Schritt 2. Unstetigkeit in $(0,0)$
Setze dazu

$$(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \quad \text{für } n\in\mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n,y_n)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n,y_n\right) = \left(0,0\right).$$

Andererseits gilt für alle $n\in\mathbb{N}$:

$$h\left(x_n,y_n\right) = h\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}+0^2} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}+0} = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1.$$

Damit folgt nun:

$$\lim_{n\to\infty} h\left(x_n,y_n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = h\left(0,0\right),$$

also ist die Funktion h nicht stetig in $(0,0)$.
Schritt 3. Partielle Stetigkeit in $(0,0)$
Sei erst $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ fest, dann gilt für $y\to 0$:

$$h\left(x,y\right) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2} = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2} \to \frac{x^2\cdot 0^2}{x^2\cdot 0^2+\left(x-0\right)^2} = \frac{x^2\cdot 0}{x^2\cdot 0+x^2} = \frac{0}{0+x^2} = \frac{0}{x^2} = 0 = h(x,0).$$

Damit folgt nun:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} h\left(x,y\right)\right) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0 = h\left(0,0\right).$$

Sei nun $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ fest, dann gilt für $x\to 0$:

$$h\left(x,y\right) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2} = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+\left(x-y\right)^2} \to \frac{0^2\cdot y^2}{0^2\cdot y^2+\left(0-y\right)^2} = \frac{0\cdot y^2}{0\cdot y^2+\left(-y\right)^2} = \frac{0}{0+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 = h(0,y).$$

Damit folgt nun:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} h\left(x,y\right)\right) = \lim_{<\to\infty} 0 = 0 = h\left(0,0\right).$$

Dies war zu zeigen. □

Aufgabe 3 (Raumkurven, Längen & Natürliche Parametrisierung)

(a) Gegeben sei die Raumkurve

$$\gamma_1\colon \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \arcsin(t) \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Länge $L(\gamma_1)$ von der Kurve γ_1. Parametrisieren Sie die Kurve γ_1 bzgl. der Bogenlänge.

(b) Gegeben sei die Raumkurve

$$\gamma_2\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \varphi e^{i\varphi}.$$

Berechnen Sie die Länge $L(\gamma_2)$ von der Kurve γ_2.

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1.** Ableitung von γ_1
Es gilt für alle $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \arcsin'(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \\ (t)'(t) &= 1, \\ \left(\sqrt{1-t^2}\right)'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}, \end{aligned}$$

da $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ist. Demnach folgt für die Ableitung von γ_1:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}.$$

für alle $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.
Schritt 2. Norm von $\dot{\gamma}_1$
Es gilt für alle $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}_1\| &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ 1 \\ \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left|\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right|^2 + |1|^2 + \left|\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}^2} + 1^2 + \frac{|t|^2}{\sqrt{1-t^2}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1-t^2} + 1 + \frac{t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{1+1-t^2+t^2}{1-t^2}} = \sqrt{\frac{2}{1-t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}, \end{aligned}$$

da $-1 < -\frac{\sqrt{3}}{2} < t < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ist.
Schritt 3. Parametrisierung ψ
Es gilt für alle $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \|\dot{\gamma}_1(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\mathrm{d}s = \sqrt{2}\left[\arcsin(s)\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{t} = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\arcsin(t) - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Schritt 4. Länge $L(\gamma_1)$
Es gilt für die Länge $L(\gamma_1)$:

$$L(\gamma_1) = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \|\dot{\gamma}_1(s)\|\,\mathrm{d}s = \psi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{3+4}{12} \cdot \pi = \frac{7\sqrt{2}}{12}\pi.$$

Schritt 5. Nacht t auflösen $l = \psi(t)$
Es gilt für $l \in \left[0, \frac{7\sqrt{2}}{12}\pi\right]$:

$$l = \psi(t) \;\Leftrightarrow\; l = \sqrt{2}\left(\arcsin(t) + \frac{\pi}{3}\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{l}{\sqrt{2}} = \arcsin(t) + \frac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; \arcsin(t) = \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow\; t = \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right),$$

d.h. die Umkehrfunktion zu ψ lautet:

$$\psi^{-1}\colon \left[0, \frac{7\sqrt{2}}{12}\pi\right] \to \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], l \mapsto \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right).$$

Schritt 6. Natürliche Parametrisierung $\widetilde{\gamma}_1$
Wegen

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{3} \leq \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\frac{7\sqrt{2}}{12}\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} = \frac{7}{12}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

gilt für alle $l \in \left[0, \frac{7\sqrt{2}}{12}\pi\right]$:

$$\widetilde{\gamma}_1(l) := \left(\gamma_1 \circ \psi^{-1}\right)(l) = \begin{pmatrix} \arcsin\left(\sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right) \\ \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right) \\ \sqrt{\cos^2\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right) \\ \left|\cos\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right)\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3} \\ \sin\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

Dies war zu zeigen. □

(b) **Schritt 0.** Raumkurve γ_2 aufstellen
Wir identifizieren $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und erhalten über die Eulersche Identität für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\gamma_2(\varphi) = \varphi e^{i\varphi} = \varphi\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) = \varphi\cos(\varphi) + i\varphi\sin(\varphi) \backsimeq \begin{pmatrix} \varphi\cos(\varphi) \\ \varphi\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Schritt 1. Ableitung von γ_2
Es gilt für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ laut Produktregel:

$$\left(\varphi\cos(\varphi)\right)'(\varphi) = \cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi),$$
$$\left(\varphi\sin(\varphi)\right)'(\varphi) = \sin(\varphi) + \varphi\cos(\varphi).$$

Demnach folgt für die Ableitung von γ_2:

$$\dot{\gamma}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Schritt 2. Norm von $\dot{\gamma}_2$
Es gilt für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \|\dot{\gamma}_2\| &= \left\|\begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) + \varphi\cos(\varphi) \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left|\cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi)\right|^2 + \left|\sin(\varphi) + \varphi\cos(\varphi)\right|^2} \\ &= \sqrt{\left(\cos(\varphi) - \varphi\sin(\varphi)\right)^2 + \left(\sin(\varphi) + \varphi\cos(\varphi)\right)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(\varphi) - 2\varphi\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \varphi^2\sin^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) + 2\varphi\sin(\varphi)\cos(\varphi) + \varphi^2\cos^2(\varphi)} \\ &= \sqrt{1 + \varphi^2\left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)} = \sqrt{1 + \varphi^2}, \end{aligned}$$

laut der ersten binomischen Formel und dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1 \text{ für alle } \theta \in \mathbb{R}.$$

Schritt 3. Parametrisierung ψ
Es gilt für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \|\dot{\gamma}_2(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 + s^2}\mathrm{d}s = \int_0^{\varphi} \frac{\sqrt{1 + s^2} + \sqrt{1 + s^2}}{2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \left(\sqrt{1 + s^2} + \sqrt{1 + s^2}\right)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\left(\frac{1+s^2}{\sqrt{1+s^2}}+\sqrt{1+s^2}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}+\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}+\sqrt{1+s^2}\right)\mathrm{d}s.$$

Weiter haben wir für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arsinh}(s)\right]_0^{\varphi} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(\varphi)-\operatorname{arsinh}(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(\varphi)-0\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\varphi),$$

da $\operatorname{arsinh}(0) = 0$ ist wegen $\sinh(0) = 0$. Und für das nächste Integral haben wir für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1+s^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left[s\sqrt{1+s^2}\right]_0^{\varphi} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{s\cdot(2s)}{2\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}-0\cdot\sqrt{1+0^2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2}-0\right) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s.$$

Zusammengefasst gilt nun für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}+\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}+\sqrt{1+s^2}\right)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\varphi) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\varphi}\frac{s^2}{\sqrt{1+s^2}}\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2}.$$

Schritt 4. Länge $L(\gamma_2)$
Es gilt für die Länge $L(\gamma_2)$:

$$L(\gamma_2) = \int\limits_0^{2\pi}\|\dot{\gamma}_2(s)\|\,\mathrm{d}s = \psi(2\pi) = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(2\pi) + \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\sqrt{1+(2\pi)^2} = \frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+(2\pi)^2}\right) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}.$$

Dies war zu zeigen. □