

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt (wird am Mittwoch, den 20.05.2020 besprochen)

Aufgabe 1 ((Partielle) Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz \mathbb{R}^2 stetig ist.
- (b) Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungen $\frac{d}{dx}f$ und $\frac{d}{dy}f$ der Funktion f auf \mathbb{R}^2 .
- (c) Wo ist die Funktion f differenzierbar? Geben Sie in diesem Fall die Ableitung f' an.

Aufgabe 2 (Richtungsableitung)

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Begründen Sie, dass die Funktion f nicht differenzierbar ist in $(0, 0)$.
- (b) Zeigen Sie, dass für alle Richtungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Richtungsableitung $\frac{d}{d\vec{v}}f(0, 0)$ existiert.

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 1 + 3z \\ x^2 + y + z^2 \\ 4yz \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Funktion f differenzierbar ist auf \mathbb{R}^3 und berechnen Sie die Ableitung g' .
- (b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g := f \circ f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 4 (Lokaler Umkehrsatz)

Gegeben sei die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -e^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass um jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(x_0, y_0) \in U$ existiert so, dass $f|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv ist.
- (b) Ist die Funktion f injektiv? Begründen Sie ihre Antwort.