18.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1 ((Partielle) Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}, \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

(b) Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f$ der Funktion f auf $\mathbb{R}^2$.

(c) Wo ist die Funktion f differenzierbar? Geben Sie in diesem Fall die Ableitung f' an.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Stetigkeit in $(0,0)$
Wir haben für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| &= \left|\frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{\left|y\left(y^2-x^2\right)\right|}{|x^2+y^2|} = |y|\,\frac{\left|y^2-x^2\right|}{x^2+y^2} \\ &\leq |y|\,\frac{\left|y^2\right|+\left|x^2\right|}{x^2+y^2} = |y|\,\frac{y^2+x^2}{x^2+y^2} = |y|\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |y| \end{aligned}$$

laut der Dreiecksungleichung vom Betrag $|\cdot|$. Mit Hilfe der Stetigkeit der Betragsfunktion $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ folgt nun für $(x,y) \to (0,0)$:

$$0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| \leq |y| \to |0| = 0.$$

Damit ist gezeigt, dass die Funktion f stetig ist in $(0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2$
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist. □
Schritt 1. Partielle Ableitung auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ laut Quotientenregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^3-x^2y}{x^2+y^2}\right](x,y) = \frac{(-2xy)\cdot\left(x^2+y^2\right) - \left(y^3-x^2y\right)\cdot(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2x^3y-2xy^3-2xy^3+2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Partielle Ableitung nach y:
Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ laut Produktregel:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}\right](x,y) = \frac{\left(3y^2 - x^2\right) \cdot \left(x^2 + y^2\right) - \left(y^3 - x^2 y\right) \cdot (2y)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{3x^2y^2 + 3y^4 - x^4 - x^2y^2 - 2y^4 + 2x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$
$$= \frac{y^4 + 4x^2y^2 - x^4}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2\right) + 4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

nach dritter binomischer Formel.
Schritt 2. Partielle Ableitung in $(0,0)$
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $h \neq 0$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - 0}{h} = \frac{\frac{0^3 - h^2 \cdot 0}{h^2 + 0^2}}{h} = \frac{\frac{0-0}{h^2+0}}{h} = \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \to 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach x ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Partielle Ableitung nach y:
Es gilt für alle $h \neq 0$:

$$\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \frac{f(0,h) - 0}{h} = \frac{\frac{h^3 - 0^2 \cdot h}{0^2 + h^2}}{h} = \frac{\frac{h^3 - 0 \cdot h}{0 + h^2}}{h} = \frac{\frac{h^3 - 0}{h^2}}{h} = \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 1 \to 1,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach y ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 1.$$

Schritt 3. Partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
Da nun beide partiellen Ableitungen in allen Punkten vom $\mathbb{R}^2$ existieren, ist die Funktion f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{cases} -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2\right) + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

□

(c) **Schritt 1.** Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die beiden partiellen Ableitungen, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$, sind als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig.
Nach dem hinreichenden Kriterium für Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit der Ableitung:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{\left(y^2 - x^2\right)\left(y^2 + x^2\right) + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Nicht-Differenzierbarkeit in $(0,0)$
Annahme: Die Funktion f wäre differenzierbar in $(0,0)$ mit Ableitung $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, dann muss laut dem Notwendigkeitskriterium für Differenzierbarkeit für A gelten:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Definition von Differenzierbarkeit müsste nun gelten:

$$0 = \lim_{\vec{h} \to (0,0)} \frac{\left\| f\left((0,0) + \vec{h}\right) - f(0,0) - A\vec{h} \right\|}{\left\| \vec{h} \right\|} = \lim_{\vec{h} \to (0,0)} \frac{\left\| f\left(\vec{h}\right) - 0 - A\vec{h} \right\|}{\left\| \vec{h} \right\|} = \lim_{\vec{h} \to (0,0)} \frac{\left\| f\left(\vec{h}\right) - A\vec{h} \right\|}{\left\| \vec{h} \right\|}.$$

Setze nun

$$\vec{h}_n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \vec{h}_n \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left|\frac{1}{n}\right|^2 + \left|\frac{1}{n}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{2}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Wegen

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \vec{h}_n \right\| = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0$$

folgt, dass $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{h}_n = (0,0)$ ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{\left\| f\left(\vec{h}_n\right) - A\vec{h}_n \right\|}{\left\| \vec{h}_n \right\|} &= \frac{\left\| f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \right\|}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{n}{\sqrt{2}} \cdot \left\| \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 - \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} - \left(0 \cdot \frac{1}{n} + 1 \cdot \frac{1}{n}\right) \right\| = \frac{n}{\sqrt{2}} \left| \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} - \left(0 + \frac{1}{n}\right) \right| \\ &= \frac{n}{\sqrt{2}} \left| \frac{\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{n} \right| = \frac{n}{\sqrt{2}} \left| \frac{0}{\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{n} \right| = \frac{n}{\sqrt{2}} \left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{n}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{n}{\sqrt{2}n} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir nun:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left\| f\left((0,0) + \vec{h}_n\right) - f(0,0) - A\vec{h}_n \right\|}{\left\| \vec{h}_n \right\|} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0,$$

obwohl $\lim\limits_{n \to \infty} \vec{h}_n = (0,0)$ ist, d.h. die Funktion f ist in $(0,0)$ nicht differenzierbar.
Schritt 3. Zusammenfassung:
Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar mit der Ableitung:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{(y^2-x^2)(y^2+x^2)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
In $(0,0)$ ist die Funktion f nicht differenzierbar, aber wenigstens partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.$$

$\square$

Aufgabe 2 (Richtungsableitung)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Begründen Sie, dass die Funktion f nicht differenzierbar ist in $(0,0)$.

(b) Zeigen Sie, dass für alle Richtungen $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ die Richtungsableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{v}} f(0,0)$ existiert.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Auf dem Übungsblatt Nr. 4, Aufgabe 2 (b) haben wir gesehen, dass die Funktion f unstetig in $(0,0)$ ist.
Für Differenzierbarkeit in $(0,0)$ müsste nach dem Notwendigkeitskriterium für Differenzierbarkeit die Funktion f stetig sein im Puntk $(0,0)$, also kann die Funktion f nicht differenzierbar in $(0,0)$ sein. □

(b) Sei $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ eine Richtung, dann gilt für alle $h \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$:

$$\frac{f((0,0)+h\cdot\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h(v_1,v_2)) - 0}{h} = \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} = \frac{\frac{(hv_1)\cdot(hv_2)^2}{(hv_1)^2+(hv_2)^4}}{h} = \frac{hv_1 \cdot h^2 v_2^2}{h^2 v_1^2 + h^4 v_2^4} \cdot \frac{1}{h} = \frac{h^2 \cdot v_1 v_2^2}{h^2\left(v_1^2 + h^2 v_2^4\right)}$$
$$= \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4}.$$

Wir führen nun eine Fallunterscheidung bzgl. v_1 durch.

Fall 1. $v_1 = 0$:
Wegen $\vec{v} \neq (0,0)$ muss also $v_2 \neq 0$ sein. Wir erhalten in diesem Fall für $h \to 0$:

$$\frac{f((0,0)+h\cdot\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} = \frac{0 \cdot v_2^2}{0^2 + h^2 v_2^4} = \frac{0}{0 + h^2 v_2^4} = 0 \to 0 \in \mathbb{R},$$

d.h. in diesem Fall existiert die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $\vec{v}$ und es ist:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial(0,v_2)} = 0.$$

Fall 2. $v_1 \neq 0$:
Wir erhalten in diesem Fall für $h \to 0$:

$$\frac{f((0,0)+h\cdot\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + h^2 v_2^4} \to \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + 0^2 \cdot v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + 0 \cdot v_2^4} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2 + 0} = \frac{v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{v_2^2}{v_1} \in \mathbb{R},$$

d.h. in diesem Fall existiert die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $\vec{v}$ und es ist:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) =: \frac{\partial f}{\partial(v_1,v_2)} = \frac{v_2^2}{v_1}.$$

Zusammenfassung:
Ist $\vec{v} = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ eine Richtung, so existiert die Richtungsableitung der Funktion f in $(0,0)$ nach der Richtung $\vec{v}$. Weiter ist der Wert dieser Richtungsableitung gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) =: \frac{\partial f}{\partial(v_1,v_2)} = \begin{cases} 0, & \text{falls } v_1 = 0 \\ \frac{v_2^2}{v_1}, & \text{falls } v_1 \neq 0 \end{cases} .$$

Weiter ist die Funktion f stetig (differenzierbar) auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, aber nicht stetig und insbesondere nicht differenzierbar im Punkt $(0,0)$. □

Aufgabe 3 (Differenzierbarkeit)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} 1+3z \\ x^2+y+z^2 \\ 4yz \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^3$ und berechnen Sie die Ableitung f'.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $g := (f \circ f) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1.** f differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$
Die Funktion f ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Partielle Ableitungen nach x:
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}[1+3z](x,y,z) = 0,\\
\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y+z^2\right](x,y,z) = 2x,\\
\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}[4yz](x,y,z) = 0.
\end{aligned}$$

Partielle Ableitungen nach y:
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}[1+3z](x,y,z) = 0,\\
\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y+z^2\right](x,y,z) = 1,\\
\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}[4yz](x,y,z) = 4z.
\end{aligned}$$

Partielle Ableitungen nach z:
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}[1+3z](x,y,z) = 3,\\
\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left[x^2+y+z^2\right](x,y,z) = 2z,\\
\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}[4yz](x,y,z) = 4y.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Die Ableitung f' aufstellen
Die Funktion f ist (stetig) differenzierbar mit der Ableitungsmatrix

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2x & 1 & 2z \\ 0 & 4z & 4y \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. □
(b) **Schritt 1.** g differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$
Als Verkettung von differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ ist die Funktion g differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ und besitzt nach der Kettenregel die Ableitung:

$$g'(x,y,z) = (f \circ f)'(x,y,z) = f'(f(x,y,z)) \cdot f'(x,y,z)$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Insbesondere für $(x,y,z) = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ folgt somit:

$$g'(0,0,0) = f'(f(0,0,0)) \cdot f'(0,0,0).$$

Schritt 2. Berechnung der einzelnen Faktoren
Berechnung von $f(0,0,0)$:
Es gilt:

$$f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1+3\cdot 0 \\ 0^2+0+0^2 \\ 4\cdot 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 0+0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $f'(0,0,0)$:
Es gilt:

$$f'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2\cdot 0 & 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 4\cdot 0 & 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $f'(f(0,0,0))$:
Wegen

$$f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gilt:

$$f'(f(0,0,0)) = f'(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2\cdot 1 & 1 & 2\cdot 0 \\ 0 & 4\cdot 0 & 4\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. Berechnung von $g'(0,0,0)$
Es gilt nun:

$$\begin{aligned} f'(f(0,0,0)) \cdot f'(0,0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0+0\cdot 0+3\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 1+3\cdot 0 & 0\cdot 3+0\cdot 0+3\cdot 0 \\ 2\cdot 0+1\cdot 0+3\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot 3+1\cdot 0+3\cdot 0 \\ 0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 3+0\cdot 0+0\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 6+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies war zu berechnen. $\square$

Aufgabe 4 (Lokaler Umkehrsatz)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + \arctan(x)) \sin(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass um jeden Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(x_0, y_0) \in U$ existiert so, dass $f|_U : U \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist.

(b) Ist die Funktion f injektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 4

(a) **Schritt 1.** Stetige Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$
Die Funktion f ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Partielle Ableitungen nach x:
Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(2 + \arctan(x)) \sin(y)\right](x, y) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \sin(y) = \frac{\sin(y)}{1 + x^2},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\mathrm{e}^x \cos(y)\right](x, y) = -\mathrm{e}^x \cos(y),$$

da $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.
Partielle Ableitungen nach y:
Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(2 + \arctan(x)) \sin(y)\right](x, y) = (2 + \arctan(x)) \cos(y),$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\mathrm{e}^x \cos(y)\right](x, y) = -\mathrm{e}^x\left(-\sin(y)\right) = \mathrm{e}^x \sin(y).$$

Schritt 3. Die Ableitung f' aufstellen
Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2 + \arctan(x)) \cos(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) & \mathrm{e}^x \sin(y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Determinante $\det(f'(x, y)) \neq 0$ zeigen
Es gilt für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\det(f'(x, y)) = \begin{vmatrix} \frac{\sin(y)}{1+x^2} & (2 + \arctan(x)) \cos(y) \\ -\mathrm{e}^x \cos(y) & \mathrm{e}^x \sin(y) \end{vmatrix} = \frac{\sin(y)}{1 + x^2} \cdot e^x \sin(y) - (-\mathrm{e}^x \cos(y)) \cdot (2 + \arctan(x)) \cos(y)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^x \sin^2(y)}{1 + x^2} + \mathrm{e}^x (2 + \arctan(x)) \cos^2(y).$$

Wir haben für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x > 0,\ \frac{1}{1 + x^2} \geq \frac{1}{1 + 0} = 1 > 0,\ \sin^2(y) \geq 0,\ \cos^2(y) \geq 0, 2 + \arctan(x) \geq 2 - \frac{\pi}{2} > 2 - \frac{4}{2} = 2 - 2 = 0,$$

weil $\arctan(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ und $\pi < 4$ ist. Damit folgt nun für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\det(f'(x, y)) = \frac{\mathrm{e}^x \sin^2(y)}{1 + x^2} + \mathrm{e}^x (2 + \arctan(x)) \cos^2(y) \geq 0 + 0 = 0$$

mit

$$\det(f'(x, y)) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{e}^x \sin^2(y)}{1 + x^2} + \mathrm{e}^x (2 + \arctan(x)) \cos^2(y) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin^2(y) = 0 \text{ und } \cos^2(y) = 0.$$

Allerdings gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ nach dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 > 0$$

und aus $\sin^2(\varphi) \geq 0$ und $\cos^2(\varphi) \geq 0$ folgt nun, dass

$$\left(\sin^2(y), \cos^2(y)\right) \neq (0,0) \text{ für alle } y \in \mathbb{R}$$

ist. Damit haben wir für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\det(f'(x,y)) > 0, \text{ bzw. insbesondere } \det(f'(x,y)) \neq 0.$$

Schritt 5. Lokalen Umkehrsatz zitieren
Wegen $\det(f'(x,y)) \neq 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ist die Ableitungsmatrix $f'(x,y) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ regulär.
Sei nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt und setze $U := \mathbb{R}^2$. Dann ist die Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit $(x_0, y_0) \in U$, weiter ist $f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^2\right)$ mit $f'(x_0, y_0)$ regulär. Nach dem lokalen Umkehrsatz folgt nun, dass es offene Umgebungen $V_1 \subseteq U$ und $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt mit $(x_0, y_0) \in V_1$ und $f(x_0, y_0) \in V_2$ so, dass die Restriktion & co-Restriktion

$$f|_{V_1} : V_1 \to V_2 \text{ bijektiv ist.}$$

Mit $V := V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist somit insbesondere die Restriktion

$$f|_V : V \to \mathbb{R}^2$$

injektiv und $(x_0, y_0) \in V_1 = V$. $\square$

(b) Behauptung: Die Funktion f ist **nicht** injektiv.
Beweis:
Es gilt wegen

$$\arctan(0) = 0, \ \mathrm{e}^0 = 1, \ \sin(0) = 0 = \sin(2\pi) \text{ und } \cos(0) = 1 = \cos(2\pi):$$

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin(0) \\ -\mathrm{e}^0\cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+0)\cdot 0 \\ -1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ f(0,2\pi) &= \begin{pmatrix} (2+\arctan(0))\sin(2\pi) \\ -\mathrm{e}^0\cos(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+0)\cdot 0 \\ -1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $(0,0), (0,2\pi) \in \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \neq (0,2\pi)$, aber

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = f(0,2\pi)$$

folgt nun, dass die Funktion f nicht injektiv sein kann. $\square$