23.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

6. Übungsblatt
(wird am Mittwoch, den 27.05.2020 besprochen)

Aufgabe 1 (Implizit-definite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in einer gewissen offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um den Punkt $(0, 1)$ eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ existiert mit $g(0, 1) = (1, 1)$ und

$$f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } (x_1, x_2) \in U.$$

Berechnen Sie anschließend die Ableitung von g im Punkt $(0, 1)$.

Aufgabe 2 (Drittes Taylorpolynom)

Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom um den Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ von der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^{x+y}.$$

Aufgabe 3 (Lokale Extremwerte)

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

auf $\mathbb{R}^2$, und entscheiden Sie danach, ob es sich um Maxima bzw. Minima handelt.

(b) Begründen Sie, dass die Funktion

$$g\colon \overline{B_{\sqrt{2}}(0, 0)} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

auf der Menge $\overline{B_{\sqrt{2}}(0, 0)}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese anschließend.

Aufgabe 4 (Extremwertberechnung unter Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie alle Stellen von lokalen Extrema, das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 5x + y - 3z$$

auf der Menge

$$T := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$