23.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1 (Implizit-definite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x_1) + x_2 - y_1^2 - y_2^2 \\ x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch die Gleichung

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in einer gewissen offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ um den Punkt $(0,1)$ eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon V \to \mathbb{R}^2$ existiert mit $g(0,1) = (1,1)$ und

$$f(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für alle } (x_1, x_2) \in V.$$

Berechnen Sie anschließend die Ableitung von g im Punkt $(0,1)$.

Lösung von Aufgabe 1

Schritt 1. Stetige Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^4$
Die Funktion f ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^4$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Partielle Ableitungen nach x_1:
Es gilt für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\cos(x_1) + x_2 - y_1^2 - y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2) = -\sin(x_1), \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2) = 1. \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen nach x_2:
Es gilt für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\cos(x_1) + x_2 - y_1^2 - y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2) \\ &= 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left[x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2) \\ &= -\pi\cos(\pi x_2). \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen nach y_1:
Es gilt für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial y_1}\left[\cos(x_1) + x_2 - y_1^2 - y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2)\\ &= -2y_1,\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial y_1}\left[x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2)\\ &= -2y_1.\end{aligned}$$

Partielle Ableitungen nach y_2:
Es gilt für alle $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\left[\cos(x_1) + x_2 - y_1^2 - y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2)\\ &= -2y_2,\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2) &= \frac{\partial}{\partial y_2}\left[x_1 - \sin(\pi x_2) - y_1^2 + y_2^2\right](x_1, x_2, y_1, y_2)\\ &= 2y_2.\end{aligned}$$

Schritt 3. Die Ableitung f' aufstellen
Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(\vec{x}, \vec{y}) = f'(x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(\vec{x}, \vec{y}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(\vec{x}, \vec{y}) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(\vec{x}, \vec{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) & 1 & -2y_1 & -2y_2 \\ 1 & -\pi\cos(\pi x_2) & -2y_1 & 2y_2 \end{pmatrix}$$

für alle $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$.
Schritt 4. Determinante $\det\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)\right) \neq 0$ zeigen
Es gilt für die Ableitung f':

$$f'(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} -\sin(0) & 1 & -2\cdot 1 & -2\cdot 1 \\ 1 & -\pi\cos(\pi\cdot 1) & -2\cdot 1 & 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -\pi\cos(\pi) & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & \pi & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

d.h. wir haben für die Ableitungen nach $\vec{x}$ bzw. $\vec{y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}&\det\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)\right) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2 - (-2)\cdot(-2)\\ &= -4 - 4 = -8 \neq 0.\end{aligned}$$

Schritt 5. Satz über implizit-definite Funktionen zitieren
Wegen $\det\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)\right) \neq 0$ ist die Matrix $\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regulär. Weiter gilt:

$$f(0,1,1,1) = \begin{pmatrix} \cos(0) + 1 - 1^2 - 1^2 \\ 0 - \sin(\pi\cdot 1) - 1^2 + 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1 - 1 - 1 \\ 0 - \sin(\pi) - 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir haben nun: $n = 4,\ m = 2,\ p = m - n = 4 - 2 = 2,\ U := \mathbb{R}^4 \subseteq \mathbb{R}^4$ offen, $\vec{x}_0 := (0,1),\ \vec{y}_0 := (1,1),\ f \in C^1\left(U, \mathbb{R}^2\right)$ mit $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U$ und

$$f(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = f(0,1,1,1) = \vec{0} \in \mathbb{R}^2,$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)$$

regulär. Laut dem Satz über implizit-definite Funktionen gibt es nun offene Umgebungen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\vec{x}_0 = (0,1) \in V_1$, $\vec{y}_0 = (1,1) \in V_2$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon V_1 \to V_2$ mit

$$g(0,1) = g(\vec{x}_0) = \vec{y}_0 = (1,1)$$

und für alle $(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,x_2,y_1,y_2) \in V_1 \times V_2$ gilt:

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{y} = g(\vec{x}).$$

Setzen wir nun

$$V := V_1,$$

so gilt:

$$f(x_1,x_2,g(x_1,x_2)) = \vec{0}$$

für alle $(x_1,x_2) \in V$.

Schritt 6. Ableitung $g'(0,1)$ berechnen

Laut dem Satz über implizit-definite Funktionen gilt unter anderem:

$$g'(0,1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(0,1,1,1).$$

Nach der Cramerschen Regel gilt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 2 & -(-2) \\ -(-2) & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\cdot 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt nun:

$$\begin{aligned} g'(0,1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{y}}(0,1,1,1)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(0,1,1,1) = -\left(-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 1 + 1\cdot \pi \\ 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot \pi \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0+1 & 1+\pi \\ 0-1 & 1-\pi \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1+\pi \\ -1 & 1-\pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 2 (Drittes Taylorpolynom)

Berechnen Sie das dritte Taylorpolynom um den Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ von der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x\mathrm{e}^{x+y}.$$

Lösung von Aufgabe 2

Schritt 1. Funktion f ausreichend differenzierbar
Die Funktion f ist als Komposition unendlich oft stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ erneut unendlich oft stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, d.h. $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$, insbesondere ist $f \in C^3\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Partielle Ableitungen nur nach x: Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + x\mathrm{e}^{x+y} = (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+1)\,\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \mathrm{e}^{x+y} + (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y} = (x+2)\,\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) &= \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(x+2)\,\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y)
\end{aligned}$$

$= \mathrm{e}^{x+y} + (x+2)\,\mathrm{e}^{x+y} = (x+3)\,\mathrm{e}^{x+y}$.

Partielle Ableitungen nur nach y:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = x\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = x\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) &= \frac{\partial^3}{\partial y^3}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = x\mathrm{e}^{x+y}.
\end{aligned}$$

Gemischte partielle Ableitungen:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x+1)\,\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x+2)\,\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = (x+2)\,\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y}.
\end{aligned}$$

Laut dem Satz von Schwartz ist die partielle Ableitung unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation, damit haben wir für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x,y) = (x+2)\,\mathrm{e}^{x+y},\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = (x+1)\,\mathrm{e}^{x+y}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Alles in $(0,0)$ auswerten
Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \cdot \mathrm{e}^{0+0} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= (0+1)\,\mathrm{e}^{0+0} = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = 1 \cdot 1 = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= 0 \cdot \mathrm{e}^{0+0} = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= (0+2)\,\mathrm{e}^{0+0} = 2\cdot \mathrm{e}^0 = 2\cdot 1 = 2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= 0\cdot \mathrm{e}^{0+0} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= (0+1)\,\mathrm{e}^{0+0} = 1\cdot \mathrm{e}^0 = 1\cdot 1 = 1,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = 1,\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) &= (0+3)\,\mathrm{e}^{0+0} = 3\cdot \mathrm{e}^0 = 3\cdot 1 = 3,\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0) &= (0+2)\,\mathrm{e}^{0+0} = 2\cdot \mathrm{e}^0 = 2\cdot 1 = 2,\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0) &= (0+1)\,\mathrm{e}^{0+0} = 1\cdot \mathrm{e}^0 = 1\cdot 1 = 1,\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0) &= 0\cdot \mathrm{e}^{0+0} = 0,\\
\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(0,0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0) = 2,\\
\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(0,0) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0,0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0) = 1.
\end{aligned}
$$

Schritt 4. Aufstellen der einzelnen Summanden

Fall 1. $k=1$:

Es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$
\frac{1}{1!}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\nabla\right)^1(f)\,(0,0) = \frac{1}{1}\left[x\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = 1\cdot[x\cdot 1 + y\cdot 0] = 1\cdot(x+0)+y\cdot 0 = 1\cdot x + 0 = x.
$$

Fall 2. $k=2$:

Es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2!}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\nabla\right)^2(f)\,(0,0) &= \frac{1}{2\cdot 1}\Big[x^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + xy\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) + yx\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) + y^2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\Big]\\
&= \frac{1}{2}\cdot\big[x^2\cdot 2 + xy\cdot 1 + yx\cdot 1 + y^2\cdot 0\big] = \frac{1}{2}\big(2x^2+xy+xy+0\big) = \frac{1}{2}\big(2x^2+2xy\big) = x\,(x+y)\,.
\end{aligned}
$$

Fall 3. $k=3$:

Es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3!}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\nabla\right)^3(f)\,(0,0) &= \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}\Big[x^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0) + x^2y\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0) + xyx\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial x}(0,0) + yx^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}(0,0)\\
&\quad + y^2x\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial x}(0,0) + yxy\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}(0,0) + xy^2\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0) + y^3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)\Big]\\
&= \frac{1}{6}\cdot\big[x^3\cdot 3 + x^2y\cdot 2 + xyx\cdot 2 + yx^2\cdot 2 + y^2x\cdot 1 + yxy\cdot 1 + xy^2\cdot 1 + y^3\cdot 0\big]\\
&= \frac{1}{6}\big(3x^3+2x^2y+2x^2y+2x^2y+xy^2+xy^2+xy^2+0\big) = \frac{1}{6}\big(3x^3+6x^2y+3xy^2\big)\\
&= \frac{x}{2}\big(x^2+2xy+y^2\big) = \frac{x}{2}\,(x+y)^2\,.
\end{aligned}
$$

Schritt 5. Taylorpolynom aufstellen

Wir erhalten nun das dritte Taylorpolynom von f in $(0,0)\in\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
T_{f,(0,0)}(x,y) &= f(0,0) + \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k!}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\nabla\right)^k(f)\,(0,0) = 0 + x + x\,(x+y) + \frac{1}{2}x\,(x+y)^2 = x + x\,(x+y) + \frac{1}{2}x\,(x+y)^2\\
&= x\left(1+\left(1+\frac{1}{2}(x+y)\right)(x+y)\right)
\end{aligned}
$$

für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 3 (Lokale Extremwerte)

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

auf $\mathbb{R}^2$, und entscheiden Sie danach, ob es sich um Maxima bzw. Minima handelt.

(b) Begründen Sie, dass die Funktion

$$g\colon \overline{B_{\sqrt{2}}(0,0)} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$$

auf der Menge $\overline{B_{\sqrt{2}}(0,0)}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese anschließend.

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1.** f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
Die Funktion f ist als Komposition zweimal stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ wieder zweimal stetig differenzierbar.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
<u>Partielle Ableitungen nur nach x:</u>
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2\right](x,y) = 4x^3 + 4y - 4x = 4\left(x^3 + y - x\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[4\left(x^3 + y - x\right)\right](x,y) = 4\left(3x^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

<u>Partielle Ableitungen nur nach y:</u>
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2\right](x,y) = 4y^3 + 4x - 4y = 4\left(y^3 + x - y\right),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[4\left(y^3 + x - y\right)\right](x,y) = 4\left(3y^2 - 1\right).
\end{aligned}$$

<u>Gemischte Partielle Ableitungen:</u>
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[4\left(x^3 + y - x\right)\right](x,y) = 4,\\
\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[4\left(y^3 + x - y\right)\right](x,y) = 4.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Ableitung null setzen
Wir lösen für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4\left(x^3 + y - x\right) \\ 4\left(y^3 + x - y\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 4\begin{pmatrix} x^3 + y - x \\ y^3 + x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^3 + y - x \\ y^3 + x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Addition der ersten und zweiten Zeile:

$$0 = y^3 + x - y + x^3 + y - x \Leftrightarrow 0 = x^3 + y^3 \Leftrightarrow y^3 = x^3 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{-x^3} \Leftrightarrow y = -x.$$

Ausdruck $(x,-x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ in die erste Gleichung eingesetzt, liefert:

$$\begin{aligned}
0 = x^3 + (-x) - x \Leftrightarrow 0 = x^3 - x - x \Leftrightarrow 0 = x^3 - 2x \Leftrightarrow 0 = x\left(x^2 - 2\right) \Leftrightarrow 0 = x\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)\\
\Leftrightarrow x \in \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\},
\end{aligned}$$

laut dritter binomischer Formel. Wir erhalten also die drei potenziellen Paare als Extremwertstellen:

$$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \ (0,0) \ \text{ und } \ \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right).$$

Schritt 4. Untersuchen der potenziellen Punkte
Die Hesse-Matrix von f in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lautet:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\left(3x^2-1\right) & 4 \\ 4 & 4\left(3y^2-1\right) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante der Hesse-Matrix gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \det\left(H_f(x,y)\right) &= \det\left(4 \begin{pmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{pmatrix}\right) = 4^2 \begin{vmatrix} 3x^2-1 & 1 \\ 1 & 3y^2-1 \end{vmatrix} = 16\left(\left(3x^2-1\right)\cdot\left(3y^2-1\right) - 1\cdot 1\right) \\ &= 16\left(\left(3x^2-1\right)\left(3y^2-1\right)-1\right). \end{aligned}$$

<u>Potenzieller Punkt $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:</u>
Es ist für $x = -\sqrt{2}$:

$$4\left(3x^2-1\right) = 4\left(3\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 1\right) = 4(3\cdot 2-1) = 4\cdot(6-1) = 4\cdot 5 = 20 > 0,$$

und für die Determinanten der Hesse-Matrix gilt in $(x,y) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \det\left(H_f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)\right) &= 16\left(\left(3\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2-1\right)\left(3\cdot\sqrt{2}^2-1\right)-1\right) = 16\left((3\cdot 2-1)(3\cdot 2-1)-1\right) = 16\left((6-1)^2-1\right) \\ &= 16\left(5^2-1\right) = 16\cdot(25-1) = 16\cdot 24 = 384 > 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Hurwitz ist die Matrix $H_f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ positiv definit, und daher folgt nach dem Satz über lokale Extremwerte, dass an der Stelle $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ die Funktion f ein lokales Minimum besitzt. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) &= \left(-\sqrt{2}\right)^4 + \sqrt{2}^4 + 4\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2} - 2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{2}^2 = 2^2+2^2-4\cdot 2-2\cdot 2-2\cdot 2 \\ &= 4+4-8-4-4 = -8. \end{aligned}$$

<u>Potenzieller Punkt $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$:</u>
Es ist für $x = \sqrt{2}$:

$$4\left(3x^2-1\right) = 4\left(3\cdot\sqrt{2}^2-1\right) = 4(3\cdot 2-1) = 4\cdot(6-1) = 4\cdot 5 = 20 > 0,$$

und für die Determinanten der Hesse-Matrix gilt in $(x,y) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$:

$$\begin{aligned} \det\left(H_f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)\right) &= 16\left(\left(3\cdot\sqrt{2}^2-1\right)\left(3\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2-1\right)-1\right) = 16\left((3\cdot 2-1)(3\cdot 2-1)-1\right) = 16\left((6-1)^2-1\right) \\ &= 16\left(5^2-1\right) = 16\cdot(25-1) = 16\cdot 24 = 384 > 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Hurwitz ist die Matrix $H_f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ positiv definit, und daher folgt nach dem Satz über lokale Extremwerte, dass an der Stelle $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ die Funktion f ein lokales Minimum besitzt. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) &= \sqrt{2}^4 + \left(-\sqrt{2}\right)^4 + 4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right) - 2\cdot\sqrt{2}^2 - 2\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2^2+2^2-4\cdot 2-2\cdot 2-2\cdot 2 \\ &= 4+4-8-4-4 = -8. \end{aligned}$$

<u>Potenzieller Punkt $(0,0)$:</u>
Es ist für $x = 0$:

$$4\left(3x^2-1\right) = 4\left(3\cdot 0^2-1\right) = 4(3\cdot 0-1) = 4\cdot(0-1) = 4\cdot(-1) = -4 < 0,$$

und für die Determinanten der Hesse-Matrix gilt in $(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{aligned} \det\left(H_f(0,0)\right) &= 16\left(\left(3\cdot 0^2-1\right)\left(3\cdot 0^2-1\right)-1\right) = 16\left((3\cdot 0-1)(3\cdot 0-1)-1\right) = 16\left((0-1)^2-1\right) = 16\left((-1)^2-1\right) \\ &= 16\cdot(1-1) = 16\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Da $H_f(0,0)$ eine 2-Matrix ist, ist die Matrix $H_f(0,0)$ semidefinit und daher ist mit dem Satz über lokale Extremwerte für die Stelle $(0,0)$ keine Aussage über Extrempunkte möglich. Es gilt aber für alle $r \in \left(0, \sqrt{2}\right)$, dass die Punkte

$$(\varepsilon, 0) \text{ und } \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

in dem offenen Ball $B_r(0,0)$ liegen für alle $\varepsilon \in (0,r)$. Für diese Punkte gilt nun:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon,0) &= \varepsilon^4 + 0^4 + 4\cdot\varepsilon\cdot 0 - 2\cdot\varepsilon^2 - 2\cdot 0^2 = \varepsilon^4 + 0 - 0 - 2\varepsilon^2 - 2\cdot 0 = \varepsilon^2\left(\varepsilon^2 - 2\right) - 0 \\ &< \varepsilon^2\left(r^2-2\right) < \varepsilon^2\left(\sqrt{2}^2 - 2\right) = \varepsilon^2(2-2) = \varepsilon^2\cdot 0 = 0, \\ f\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^4 + 4\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} - 2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\varepsilon^4}{2^2} + \frac{\varepsilon^4}{2^2} + 4\frac{\varepsilon^2}{2} - 2\frac{\varepsilon^2}{2} - 2\frac{\varepsilon^2}{2} \\ &= 2\frac{\varepsilon^4}{4} + 2\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon^4}{2} > 0. \end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$f(0,0) = 0^4 + 0^4 + 4\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 0^2 - 2\cdot 0^2 = 0 + 0 - 0 - 2\cdot 0 - 2\cdot 0 = -0 - 0 = 0.$$

Daher folgt nun:

$$f(\varepsilon,0) < 0 = f(0,0) = 0 < f\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$$

für alle $\varepsilon \in (0,r)$ und für alle Radien $r \in \left(0, \sqrt{2}\right)$. D.h. im Punkt $(0,0)$ hat die Funktion f **kein** lokales Extremum.
Zusammenfassend haben wir somit gezeigt:
Die Funktion f ist zweifach stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ und besitzt die zwei lokale Extrema, genauer zwei lokale Minima in $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ und $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ mit dem Funktionswert:

$$f\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = -8 = f\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right).$$

Außerdem hat die Funktion f noch einen weiteren kritischen Punkt in $(0,0)$, welcher aber keine Stelle eines Extremwertes sein kann. □

(b) **Schritt 1.** Untersuchung im Inneren von K
Auf dem offenen Ball $B_{\sqrt{2}}(0,0)$ hat die Funktion f bzw. g keine (lokalen) Extremwerte, da für die kritischen Punkte der Funktion f gilt:

- Im Punkt $(0,0) \in K$ hat die Funktion f bzw. g kein lokales Extremum.
- Der Punkt $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ ist nicht in der Menge K enthalten, denn:

$$\left\| \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left|-\sqrt{2}\right|^2 + \left|\sqrt{2}\right|^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 > \sqrt{2}.$$

- Der Punkt $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ ist nicht in der Menge K enthalten, denn:

$$\left\| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left|\sqrt{2}\right|^2 + \left|-\sqrt{2}\right|^2} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2 > \sqrt{2}.$$

Schritt 2. Existenz von Extremwerten feststellen
Die Menge

$$K = \overline{B_{\sqrt{2}}(0,0)} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kompakt, da die Menge K nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen ist. Die Funktion g ist insbesondere stetig, daher folgt laut Vorlesung, dass das Bild $g(K) \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls kompakt ist und es existieren Maximum und Minimum von g auf der Menge K.
Schritt 3. Betrachtung des Randes
Da dieses Maximum und Minimum nicht im Inneren von K sich befinden kann, müssen diese auf dem Rand angenommen werden, d.h. auf der Menge:

$$\partial K = \overline{B_{\sqrt{2}}(0,0)} \setminus B_{\sqrt{2}}(0,0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Parametrisierung von ∂K:
Alle Randpunkte sind gegeben durch Punkte der Form

$$\left(\sqrt{2}\cos(\varphi), \sqrt{2}\sin(\varphi)\right)$$

für einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$.
Parametrisierung einsetzen:
Es gilt für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned}
h(\varphi) &:= g\left(\sqrt{2}\cos(\varphi), \sqrt{2}\sin(\varphi)\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\cos(\varphi)\right)^4 + \left(\sqrt{2}\sin(\varphi)\right)^4 + 4 \cdot \sqrt{2}\cos(\varphi) \cdot \sqrt{2}\sin(\varphi) - 2 \cdot \left(\sqrt{2}\cos(\varphi)\right)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{2}\sin(\varphi)\right)^2 \\
&= 4\cos^4(\varphi) + 4\sin^4(\varphi) + 8\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 4\cos^2(\varphi) - 4\sin^2(\varphi) \\
&= 4\big(\cos^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\sin^2(\varphi) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \left(\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)\right)\big) \\
&= 4\big(\cos^2(\varphi)\left(1 - \sin^2(\varphi)\right) + \sin^2(\varphi)\left(1 - \cos^2(\varphi)\right) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 1\big) \\
&= 4\big(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 1\big) \\
&= 4\left(1 - 2\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - 1\right) = 4\left(-2\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) \\
&= 8\sin(\varphi)\cos(\varphi)\left(1 - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right)
\end{aligned}$$

laut dem trigonometrischen Pythagoras:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{R}$$

bzw. umgestellt:

$$cos^2(z) = 1 - \sin^2(z) \text{ und } \sin^2(z) = 1 - \cos^2(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{R}.$$

Erste Ableitung von h:
Mittels Produktregel gilt:

$$\begin{aligned}
h'(\varphi) &= 8\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)\left(1 - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) + 8\sin(\varphi)\cos(\varphi)\left(-\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) \\
&= 8\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)\left(1 - \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) \\
&= 8\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)\left(1 - 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\right) = 8\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)\left(1 - \sin(2\varphi)\right)
\end{aligned}$$

für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ mittels des Additionstheorems für $x = y = \varphi$:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \sin(y) \cdot \cos(x) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Erste Ableitung von h null setzen:

$$\begin{aligned}
h'(\varphi) = 0 &\Leftrightarrow\ 8\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)\left(1 - \sin(2\varphi)\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sin^2(\varphi) = \cos^2(\varphi) \text{ oder } \sin(2\varphi) = 1 \\
&\Leftrightarrow\ |\sin(\varphi)| = |\cos(\varphi)| \text{ oder } \sin(2\varphi) = 1 \ \Leftrightarrow\ \varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\} \text{ oder } \varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right\} \\
&\Leftrightarrow\ \varphi \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}
\end{aligned}$$

wegen den Funktionswerten:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right), \\
\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3}{4}\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right).
\end{aligned}$$

Nun müssen wir die Winkel

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi,$$

sowie

$$\varphi = 0, 2\pi$$

als Ränder des Intervalls $[0, 2\pi)$ untersuchen.
Auswerten der Funktion h: Es gilt:

$$h(0) = 8\sin(0)\cos(0)\left(1 - \sin(0)\cos(0)\right) = 8 \cdot 0 \cdot 1 \cdot (1 - 0 \cdot 1) = 0,$$

$$h(2\pi) = 8\sin(2\pi)\cos(2\pi)\left(1-\sin(2\pi)\cos(2\pi)\right) = 8\cdot 0\cdot 1\cdot(1-0\cdot 1) = 0,$$

$$h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\cdot 2\cdot\left(1-\frac{2}{4}\right) = 4\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$= 4\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

$$h\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 8\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\left(1-\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$= -2\cdot 2\cdot\left(1+\frac{2}{4}\right) = -4\left(1+\frac{1}{2}\right) = -4\cdot\frac{3}{2} = -6,$$

$$h\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 8\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)\left(1-\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = 8\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$
$$= 2\cdot 2\cdot\left(1-\frac{2}{4}\right) = 4\left(1-\frac{1}{2}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2,$$

$$h\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 8\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)\left(1-\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = 8\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= -2\cdot 2\cdot\left(1+\frac{2}{4}\right) = -4\left(1+\frac{1}{2}\right) = -4\cdot\frac{3}{2} = -6.$$

<u>Zurück zur Funktion g:</u>
Wegen

$$h\left(\frac{3}{4}\pi\right) = h\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -6 < 0 = h(0) = h(2\pi) = 0 < 2 = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

und der zwingenden Existenz globaler Minima und Maxima der Funktion g auf der Menge K folgt, dass die Funktion g globale/ lokale Minima für die Winkel

$$\varphi = \frac{3}{4}\pi \text{ und } \varphi = \frac{7}{4}\pi$$

bzw. in den Punkten

$$\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \left(\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (-1, 1),$$
$$\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) = \left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (1, -1)$$

hat mit dem Funktionswert

$$g(-1, 1) = h\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -6 = h\left(\frac{7}{4}\pi\right) = g(1, -1),$$

und die Funktion g hat globale/ lokale Maxima für die Winkel

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ und } \varphi = \frac{5}{4}\pi$$

bzw. in den Punkten

$$\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right)\right) = \left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = (1, 1),$$
$$\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right), \sqrt{2}\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) = \left(\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{2}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (-1, -1)$$

mit dem Funktionswert

$$g(-1, -1) = h\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 2 = h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g(1, 1).$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 4 (Extremwertberechnung unter Nebenbedingungen)

Bestimmen Sie alle Stellen von lokalen Extrema, das Minimum und das Maximum der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto 5x + y - 3z$$

auf der Menge

$$T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0 \text{ und } x^2+y^2+z^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Lösung von Aufgabe 4

Schritt 0. Setting aufstellen
Wir setzen die Bedingungsfunktionen $h_1, h_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$h_1(x,y,z) = x+y+z \text{ und } h_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$$

für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, welche durch die Menge T gegeben sind.
Weiter definieren wir die Funktion $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) + \lambda_1 h_1(x,y,z) + \lambda_2 h_2(x,y,z) = 5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2\left(x^2+y^2+z^2-1\right)$$

für $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^5$.
Schritt 1. Stetig differenzierbare Funktionen
Die Funktionen f, h_1, h_2 sind als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$. Weiter ist somit die Funktion F als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^5$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^5$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Es gilt für alle $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2\left(x^2+y^2+z^2-1\right)\right](x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 5+\lambda_1+2\lambda_2 x,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2\left(x^2+y^2+z^2-1\right)\right](x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 1+\lambda_1+2\lambda_2 y,\\
\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial z}\left[5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2\left(x^2+y^2+z^2-1\right)\right](x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = -3+\lambda_1+2\lambda_2 z,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left[5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2\left(x^2+y^2+z^2-1\right)\right](x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x+y+z,\\
\frac{\partial F}{\partial \lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left[5x+y-3z+\lambda_1(x+y+z)+\lambda_2\left(x^2+y^2+z^2-1\right)\right](x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2+y^2+z^2-1.
\end{aligned}$$

Es gilt somit für den Gradienten von F für alle $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^5$:

$$\operatorname{grad}(F)(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+\lambda_1+2\lambda_2 x \\ 1+\lambda_1+2\lambda_2 y \\ -3+\lambda_1+2\lambda_2 z \\ x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. Erste Ableitung null setzen
Wir suchen $(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^5$ mit

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \operatorname{grad}(F)(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \begin{pmatrix} 5+\lambda_1+2\lambda_2 x \\ 1+\lambda_1+2\lambda_2 y \\ -3+\lambda_1+2\lambda_2 z \\ x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

<u>Fall 1. $\lambda_2 = 0$:</u>
In diesem Fall müsste gelten:

$$\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+\lambda_1+2\cdot 0\cdot x \\ 1+\lambda_1+2\cdot 0\cdot y \\ -3+\lambda_1+2\cdot 0\cdot z \\ x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+\lambda_1+0 \\ 1+\lambda_1+0 \\ -3+\lambda_1+0 \\ x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+\lambda_1 \\ 1+\lambda_1 \\ -3+\lambda_1 \\ x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dies würde nun z.B. $\lambda_1 = -5$ und $\lambda_1 = -1 \neq -5$ liefern, was ein Widerspruch ist, d.h. dieser Fall führt zu keiner Lösung.
Fall 2. $\lambda_2 \neq 0$:
In diesem Fall erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y \\ -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir aus den ersten drei Zeilen:

$$\begin{aligned} 0 = 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x \ &\Leftrightarrow\ -2\lambda_2 x = 5 + \lambda_1 \ \Leftrightarrow\ x = -\frac{5+\lambda_1}{2\lambda_2}, \\ 0 = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y \ &\Leftrightarrow\ -2\lambda_2 y = 1 + \lambda_1 \ \Leftrightarrow\ y = -\frac{1+\lambda_1}{2\lambda_2}, \\ 0 = -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z \ &\Leftrightarrow\ 2\lambda_2 z = 3 - \lambda_1 \ \Leftrightarrow\ z = \frac{3-\lambda_1}{2\lambda_2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten nun damit aus den ersten vier Zeilen:

$$\begin{aligned} 0 = x + y + z \ &\Leftrightarrow\ 0 = -\frac{5+\lambda_1}{2\lambda_2} - \frac{1+\lambda_1}{2\lambda_2} + \frac{3-\lambda_1}{2\lambda_2} \ \Leftrightarrow\ 0 = \frac{-5-\lambda_1-1-\lambda_1+3-\lambda_1}{2\lambda_2} \ \Leftrightarrow\ 0 = -3 - 3\lambda_1 \\ &\Leftrightarrow\ 3\lambda_1 = -3 \ \Leftrightarrow\ \lambda_1 = -1. \end{aligned}$$

Dies führt zu dem Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5-1}{2\lambda_2} \\ -\frac{1-1}{2\lambda_2} \\ \frac{3-(-1)}{2\lambda_2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{2\lambda_2} \\ -\frac{0}{2\lambda_2} \\ \frac{4}{2\lambda_2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\lambda_2} \\ 0 \\ \frac{2}{\lambda_2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten aus den ersten drei Zeilen und der fünften Zeile:

$$\begin{aligned} 1 = x^2 + y^2 + z^2 \ \Leftrightarrow\ 1 = \left(-\frac{2}{\lambda_2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{2}{\lambda_2}\right)^2 \ \Leftrightarrow\ 1 = \frac{4}{\lambda_2^2} + 0 + \frac{4}{\lambda_2^2} \ \Leftrightarrow\ 1 = \frac{8}{\lambda_2^2} \ \Leftrightarrow\ \lambda_2^2 = 8 \\ \Leftrightarrow\ \lambda_2 = -\sqrt{8} \text{ oder } \lambda_2 = \sqrt{8} \Leftrightarrow\ \lambda_2 = -2\sqrt{2} \text{ oder } \lambda_2 = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Mit $\lambda_2 = -2\sqrt{2}$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{-2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{2}{-2\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\lambda_2 = 2\sqrt{2}$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{2}{2\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben nun alle kritischen Punkte von F gefunden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Schritt 4. Rangbedingung prüfen
Es gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}[x + y + z](x, y, z) = 1,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}[x+y+z](x,y,z) = 1,\\
\frac{\partial h_1}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}[x+y+z](x,y,z) = 1,\\
\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2+y^2+z^2-1\right](x,y,z) = 2x,\\
\frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2+y^2+z^2-1\right](x,y,z) = 2y,\\
\frac{\partial h_2}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left[x^2+y^2+z^2-1\right](x,y,z) = 2z.
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$h := \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \text{ auf } \mathbb{R}^2.$$

Dann ist h stetig differenzierbar mit der Ableitung:

$$h'(x,y,z) = \begin{pmatrix} h_1'(x,y,z) \\ h_2'(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Wir haben für den Rang dieser Ableitungsmatrix:

$$\operatorname{rang}\left(h'(x,y,z)\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot(-x) \\ + \end{array} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \end{pmatrix} \in \{1,2\}.$$

Weiter ist für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\operatorname{rang}\left(h'(x,y,z)\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \end{pmatrix} = 1 \;\Leftrightarrow\; y-z=0 \text{ und } z-x=0 \;\Leftrightarrow\; x=y=z\in\mathbb{R}.$$

Allerdings würde aus $(x,y,z)^T = (x,x,x)^T \in T$ gerade:

$$3x = x+x+x = 0,$$

d.h. $x=0$ folgen, aber es gilt dann

$$x^2+x^2+x^2 = 0^2+0^2+0^2 = 0+0+0 = 0 \neq 1,$$

d.h. $(0,0,0)^T = (x,y,z)^T = (x,x,x)^T \notin T$. Somit gilt für alle $(x,y,z) \in T$:

$$\operatorname{rang}\left(h'(x,y,z)\right) = 2,$$

insbesondere für

$$(x,y,z) \in \left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

Schritt 5. Lokale Extrema begründen
Die Menge T ist kompakt, da diese nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen ist. Die Funktion f ist insbesondere auf $\mathbb{R}^2$ stetig, d.h. dass das Bild $f(T)$ kompakt ist und ein Minimum und Maximum besitzt. Da die Funktion $f|_T$ nicht konstant ist, muss es also mindestens zwei lokale Extremstellen von f unter der Nebenbedingung

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

auf T geben. Nach dem Satz über lokale Extremwerte unter Nebenbedingungen befinden sich die potenziellen Extremwertstellen bei

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Da es mindestens zwei verschiedene Extremwerte geben muss und wir zwei potenzielle Stellen gefunden haben, sowie dass auch die Rangbedingungen auf T stets erfüllt sind, folgt also, dass diese beiden Stellen die gesuchten Extremwertstellen sind.
Auswertung von f:
Es gilt:

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\sqrt{2}},$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} > -\frac{8}{\sqrt{2}} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Aus

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{8}{\sqrt{2}} < \frac{8}{\sqrt{2}} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

wissen wir, dass die Funktion f im Punkt $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ auf der Menge T ein lokales/ globales Minimum mit Wert

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{8}{\sqrt{2}}$$

und im Punkt $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ auf der Menge T ein lokales/ globales Maximum mit Wert

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

hat. $\square$