Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist durch die Kreislinie

$$h(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0$$

gegeben. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\mathrm{rg}\ h'(x,y) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im kritischen Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, der wegen $h(1,-1) = -1$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$, und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\mathrm{grad}\, L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad \text{und} \quad y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \iff y = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Folglich sind $P_1 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 2

Schreibe $\vec{g} = f\vec{v}$ mit

$$f(x,y,z) := \frac{x^2+y^2+z^2-2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \qquad \vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Mit der Produktregel erhalten wir $\operatorname{rot}\vec{g} = \nabla \times \vec{g} = \nabla \times (f\vec{v}\,) = f(\nabla \times \vec{v}\,) + (\nabla f) \times \vec{v}$. Offenbar ist $\nabla \times \vec{v} = \vec{0}$ und $\partial_1 f(x,y,z) = -2x(x^2+y^2+z^2)^{-2} + 8x(x^2+y^2+z^2)^{-3}$; die anderen partiellen Ableitungen berechnet man genauso und erhält

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad (\nabla f) \times \vec{v} = \vec{0}\,.$$

Folglich ist $\operatorname{rot}\vec{g} = \vec{0}$. Für die Divergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{g} &= \nabla \cdot \vec{g} = \nabla \cdot (f\vec{v}\,) = f(\nabla \cdot \vec{v}\,) + (\nabla f) \cdot \vec{v} \\ &= 3f + \frac{8-2(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,(x^2+y^2+z^2) = \frac{x^2+y^2+z^2+2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ definiere $r(\vec{x}) := \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$. Dann ist $f = F \circ r$ und für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\frac{\partial r}{\partial x_k}\,(\vec{x}) = \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\,(\vec{x}) = \frac{\partial(F \circ r)}{\partial x_k}\,(\vec{x}) = F'\big(r(\vec{x})\big)\,\frac{\partial r}{\partial x_k}\,(\vec{x}) = F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(\vec{x}) &= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|} + F'\big(\|\vec{x}\|\big)x_k \cdot (-1)\,\frac{1}{\|\vec{x}\|^2}\,\frac{x_k}{\|\vec{x}\|} \\ &= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{1}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_k^2}{\|\vec{x}\|^3}\right)F'\big(\|\vec{x}\|\big).\end{aligned}$$

Dies führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned}\Delta f(\vec{x}) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\,(\vec{x}) \\ &= F''\big(\|\vec{x}\|\big)\,\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^2} + \left(\frac{n}{\|\vec{x}\|} - \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{\|\vec{x}\|^3}\right)F'\big(\|\vec{x}\|\big) \\ &= F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big).\end{aligned}$$