Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Sommersemester 2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit $\dot\gamma(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\,\|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \big[\tfrac13(2+t^2)^{3/2}\big]_0^{2\pi} = \tfrac13\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)\\ &= \tfrac23\sqrt2\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.\end{aligned}$$

b) Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec v\cdot d\vec s &= \int_0^{2\pi} \vec v(\gamma(t))\cdot\dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} e^{\cos t}\\ \cos t\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{2\pi}(-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\,dt = \big[e^{\cos t} - \tfrac13\cos^3 t\big]_0^{2\pi} = 0\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist. (Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet.) Schreibe $\vec v =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$\partial_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad \partial_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq \partial_y v_3(x,y,z)$$

ist $\vec v$ kein Potentialfeld, d. h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec v = \nabla f$.

Für $\vec w =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$\partial_2 w_3 = e^z = \partial_3 w_2\,, \qquad \partial_3 w_1 = 2z = \partial_1 w_3\,, \qquad \partial_1 w_2 = 0 = \partial_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec w$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert: Es ist

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2 x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ müssen wir das Kurvenintegral nach Definition ausrechnen:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben berechnete Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w}\cdot d\vec{s} = f\big(\gamma(1)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 3

Die Menge $G := \{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x,y,z > 0\,\}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf G stetig!) Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Verträglichkeitsbedingung erfüllt ist, wenn also $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b \\ -3-c \\ 1-a \end{pmatrix}\,.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = -3$ gilt.
In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-3z \\ x+2y+z \\ -3x+y+4z \end{pmatrix}$$

ein Potential $g\colon G\to\mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x g(x,y,z) = x+y-3z$ gelten soll, ergibt sich

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion c. Es folgt $\partial_y g(x,y,z) = x + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= x+2y+z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 2y+z$, also $c(y,z) = y^2 + yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion d. Somit:

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z g(x,y,z) = -3x + y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit das Potential

$$g(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2\,.$$