Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Sommersemester 2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint_B d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\, dx = \int_{-6}^{2} \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\, dx = \int_{-6}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\, dx$$
$$= \big[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\big]_{-6}^{2} = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2)-y^2\big)\, dy = \big[4y - \tfrac{2}{3}y^3\big]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,.$$

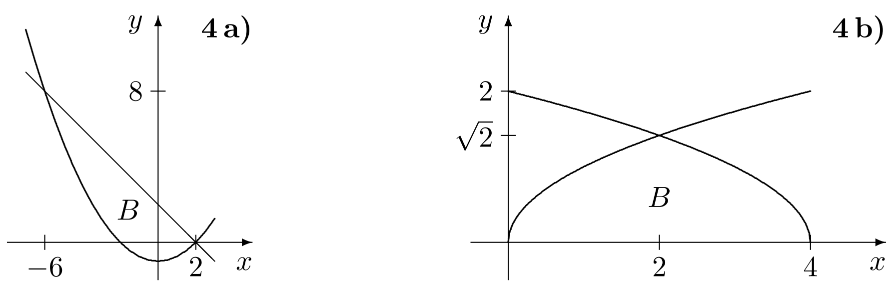
Aufgabe 2

Da der Integrand jeweils eine stetige Funktion ist, kann man die Integrationsreihenfolge nach Satz 2 in 20.5 vertauschen.

a) Es gilt

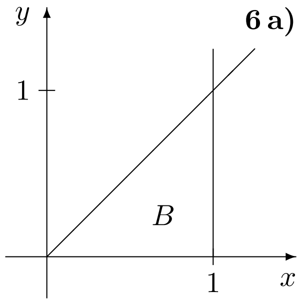
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\, dx = \int_0^1 x e^{x^2}\, dx = \big[\tfrac{1}{2}e^{x^2}\big]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

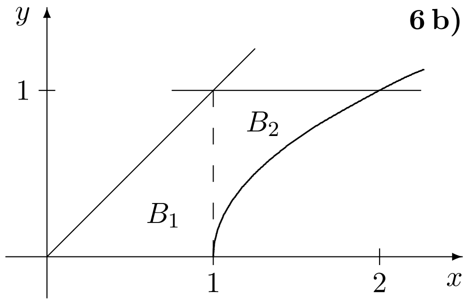
Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\, dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.



b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

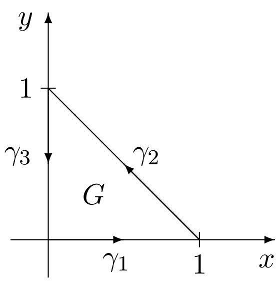
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y \, dx \, dy &= \iint\limits_{B_1} x^2 y \, d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2 y \, d(x,y) \\ &= \int_0^1 \int_0^x x^2 y \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4 \, dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)\right) dx \\ &= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_{x=0}^1 + \left[-\tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120} \,.\end{aligned}$$





Aufgabe 3

Zunächst berechnen wir $\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2 \,, \ \gamma_1(t) = (t, 0) \,, \\ \gamma_2 &\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2 \,, \ \gamma_2(t) = (2-t, t-1) \,, \\ \gamma_3 &\colon [2,3] \to \mathbb{R}^2 \,, \ \gamma_3(t) = (0, 3-t) \,.\end{aligned}$$

Dann haben $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die in der Skizze gekennzeichneten Träger und es gilt $\gamma_1(1) = (1,0) = \gamma_2(1)$ sowie $\gamma_2(2) = (0,1) = \gamma_3(2)$. Der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ ist gegeben durch $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ (im Sinne von Bemerkung 20.1 (d)). Deshalb ist

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s}.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \dot{\gamma}_1(t) \, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t \cdot 0 \\ t^2 \cdot 0 - 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3} \,,$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} (2-t)^2 + (2-t)(t-1) \\ (2-t)^2(t-1) - (t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 \begin{pmatrix} 2-t \\ t^3 - 6t^2 + 10t - 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^2 \left(t^3 - 6t^2 + 11t - 7\right) dt = \left[\frac{1}{4} t^4 - 2t^3 + \frac{11}{2} t^2 - 7t\right]_1^2 = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_2^3 \begin{pmatrix} 0 \\ -(3-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 (3-t)^2 \, dt = \Big[-\frac{1}{3}(3-t)^3\Big]_2^3 = \frac{1}{3} \, .$$

Zusammen folgt

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \, .$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:
$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G offen und konvex und somit ein Gebiet. Außerdem seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes 20.6 erfüllt sind. Dieser liefert

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_G \big(\partial_1 v_2(x,y) - \partial_2 v_1(x,y)\big) \, d(x,y) = \iint\limits_G (2xy - x) \, d(x,y) \, .$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy - x) \, dy \, dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x} \, dx \\ &= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big) \, dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big) \, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12} \, . \end{aligned}$$