Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc.. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zunächst berechnen wir $\oint_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds$. direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:
Definiere die regulären Kurven

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_1(t) = (t,0)\,,\\
\gamma_2 &\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_2(t) = (1,t-1)\,,\\
\gamma_3 &\colon [2,3] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_3(t) = (3-t,1)\,,\\
\gamma_4 &\colon [3,4] \to \mathbb{R}^2\,,\ \gamma_4(t) = (0,4-t)\,,
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\oint_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = \int_{\gamma_1} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds + \int_{\gamma_2} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds + \int_{\gamma_3} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds + \int_{\gamma_4} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds$$

Für die vier Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = \int_0^1 (\vec{v}(\gamma_1(t)) \cdot \vec{N})\, ||\dot{\gamma}_1(t)||\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = \int_1^2 \begin{pmatrix} 1+t-1 \\ (t-1)-(t-1)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 t\, dt = +\frac{3}{2}\,,$$

$$\int_{\gamma_3} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = \int_2^3 \begin{pmatrix} (3-t)^2+(3-t) \\ (3-t)^2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_2^3 \big(t^2-6t+8\big)\, dt = -\frac{2}{3}\,,$$

und

$$\int_{\gamma_4} (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = \int_3^4 \begin{pmatrix} 0 \\ -(4-t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

Zusammen folgt

$$\oint_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = \frac{5}{6}.$$

Es gilt $\operatorname{div} \vec{v} = x^2 + 2x - y$ Unter Verwendung des Divergenz Satzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$$\oint_\gamma (\vec{v} \cdot \vec{N})\, ds = 14. = \iint_G \operatorname{div} \vec{v}\, d(x,y) = \iint_G (x^2 + 2x - y)\, d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt nach Satz 2 in 20.5

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + 2x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \big[x^2 y + 2xy - \frac{1}{2} y^2\big]_{y=0}^1\, dx = \frac{5}{6}$$

Aufgabe 2

Für $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} e^x - y \\ x \end{pmatrix}$, und $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, gilt

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\cos t}(-\sin t) + \sin^2(t) + \cos^2(t)\, dt \\ &= \left[e^{\cos t} + t\right]_0^{2\pi} = 2\pi.\end{aligned}$$

Alternativ kann man das Kurvenintegral auch mit dem Gaußschen Integralsatz berechnen:
Da alle partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig sind, gilt $\vec{v} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Bezeichnet $G := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe, so ist G offen und konvex und daher ein Gebiet. Ferner besteht ∂G aus der positiv orientierten Kurve $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_G \big(\partial_x x - \partial_y(e^x - y)\big)\, d(x,y) = \iint\limits_G 2\, d(x,y) = 2\pi,$$

weil ein Kreis mit Radius 1 den Flächeninhalt $\pi \cdot 1^2 = \pi$ besitzt.

Aufgabe 3

Laut der 2.Greensche Formel gilt

$$\oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}}\, ds - \oint_{\partial G} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}\, ds = \iint\limits_G (\Delta g \cdot f - \Delta f \cdot g)\, d(x,y)\,.$$

Für die Funktion f gilt

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div}(a_1 y + b_1, a_1 x + c_1)^T = 0\,.$$

Ähnlich gilt $\Delta g = 0$. Daraus folgt, dass

$$\oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \vec{N}}\, ds - \oint_{\partial G} g \frac{\partial f}{\partial \vec{N}}\, ds = 0\,.$$