Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für $(x, y, z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1, 2]$ sowie $0 \leqslant x^2 - y^2$, also $y^2 \leqslant x^2$, d.h. $|y| \leqslant |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [1, 2],\ -x \leqslant y \leqslant x\}$$

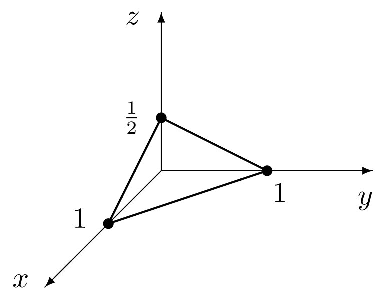
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in A_0,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\}\,.$$

[In der Notation von Abschnitt 21.2: $B_0 = A_0$, $a = 1$, $b = 2$, $u(x) = -x$, $v(x) = x$, $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = x^2 - y^2$.] Da der Integrand $f(x, y, z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 21.2

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(A) &= \iiint\limits_A d(x, y, z) = \int_1^2 \int_{-x}^x \int_0^{x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \int_1^2 \int_{-x}^x (x^2 - y^2)\,dy\,dx \\ &= \int_1^2 \left[x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\right]_{y=-x}^x dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3} x^3\,dx = \left[\tfrac{1}{3} x^4\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{3}(16 - 1) = 5\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, \frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x, y, z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\,, \quad 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$\begin{aligned}&B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B_0\,,\ 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y) \right\}, \\ &\text{wobei} \quad B_0 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x \right\}.\end{aligned}$$

Da $(x,y,z)\mapsto \sin(z)$ auf B stetig ist, ergibt sich für das Integral nach 21.2

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B \sin z\, d(x,y,z) &= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx \\ &= \int_0^1\int_0^{1-x}\big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2} dy\, dx = \int_0^1\int_0^{1-x}\Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big)+1\Big)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \big[2\sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big)+y\big]_{y=0}^{1-x} dx = \int_0^1\Big(1-x-2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx \\ &= \big[x-\tfrac12 x^2-4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^1 = \big(1-\tfrac12-4\cos 0\big)+4\cos(\tfrac12) = -\tfrac72+4\cos(\tfrac12)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es gilt

$$\iiint\limits_B |y|\, d(x,y,z) == \int_0^1\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{\frac{z^2-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{z^2-x^2}{2}}} |y|\, dy\, dx\, dz = 2\int_0^1\int_{-z}^{z}\int_0^{\sqrt{\frac{z^2-x^2}{2}}} y\, dy\, dx\, dz =$$

$$\int_0^1\int_{-z}^{z}\big(\frac{z^2-x^2}{2}\big)\, dx\, dz = \int_0^1\int_0^z (z^2-x^2)\, dx\, dz = \int_0^1 (z^3-\frac{z^3}{3})\, dz = \frac16$$

Aufgabe 4

Sei $0<r<R$. Zur Berechnung von

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \|(x,y)\|\in[r,R],\ |y|\leqslant x\big\}$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x=\varrho\cos\varphi,\quad y=\varrho\sin\varphi \quad \text{mit } \varrho\in[r,R],\ \varphi \overset{(*)}{\in} [-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{4}].$$

(Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y|\leqslant x$. Würde man $\varphi\in[0,2\pi]$ fordern, so müsste man $\varphi\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac74\pi,2\pi]$ wählen und B in $B_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|\in[r,R], 0\leqslant y\leqslant x\}$ und $B_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|\in[r,R], -x\leqslant y\leqslant 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{B_1}\frac{y}{x}\, d(x,y)+\iint_{B_2}\frac{y}{x}\, d(x,y)$.) Wir erhalten

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_r^R \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,\varrho\, d\varrho\, d\varphi = \tfrac12(R^2-r^2)\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\varphi\, d\varphi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.