Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $a, b, c > 0$. Um

$$\operatorname{vol}(E) := \iiint_E d(x,y,z)$$

für die Menge

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \left(\frac{x-2y}{a}\right)^2 + \left(\frac{y+3z}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1\right\}$$

zu berechnen, führen wir die Substitution

$$u = \frac{x-2y}{a}\,, \quad v = \frac{y+3z}{b}\,, \quad w = \frac{z}{c}\,.$$

durch. Für die Substitutionsfunktion Φ gilt

$$\det \Phi'(u,v,w) = (\det J(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,v)))^{-1}\,,$$

wobei

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{3}{b} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

mit $\det J = \frac{1}{abc}$ und $\det \Phi'(u,v,w) = abc > 0$.
Ist $K := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,:\, u^2+v^2+w^2 \leqslant 1\}$ gesetzt, so gilt $\Phi(K) = E$. Daher erhalten wir mit Hilfe der Transformationsformel 21.3

$$\iiint_E d(x,y,z) = \iiint_K abc\, d(u,v,w) = abc \iiint_K d(u,v,w)\,.$$

Nach Beispiel 21.2 (1) (mit $r = 1$) beträgt das Volumen von K: $\frac{4}{3}\pi$, so dass

$$\iiint_E d(x,y,z) = abc\,\frac{4\pi}{3}$$

folgt. Alternativ liefern Kugelkoordinaten $(u,v,w) = (r\cos\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\varphi\,\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ mit $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für $\operatorname{vol}(K)$ ebenfalls

$$\iiint_K d(u,v,w) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2r^2\, d\varphi\, dr = \int_0^1 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Aufgabe 2

Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\varphi\,,\qquad y = r\sin\varphi\,,\qquad z = z\,,\qquad d(x,y,z) = r\,d(r,\varphi,z)\,.$$

Für $(x,y,z)\in A$ gilt $0\leqslant z\leqslant 1$, und die zweite A definierende Ungleichung liefert die Bedingung $r^2\leqslant(1-z)^2$. Die Menge A ist also charakterisiert durch

$$0\leqslant z\leqslant 1\,,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\,,\qquad 0\leqslant r\leqslant 1-z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\iiint_A (x^2+y^2)^2\,e^{2(1-z)^7}\,d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1-z}(r^2)^2\,e^{2(1-z)^7}\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= 2\pi\int_0^1\int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\,dr\,dz = 2\pi\int_0^1\left[\tfrac{1}{6}r^6\right]_{r=0}^{1-z} e^{2(1-z)^7}\,dz$$

$$= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi(1-z)^6\,e^{2(1-z)^7}\,dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^{1} = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.$$

Aufgabe 3

Es seien

$$u = x-y^2\,,\ v = y+3z\,,\ w = z\,.$$

Für die Substitutionsfunktion Φ gilt

$$\det\Phi'(u,v,w) = (\det J(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,v)))^{-1}\,,$$

wobei

$$J(x,y,z) = \begin{pmatrix}1 & -2y & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

und $\det J = 1$. Wir bekommen, dass

$$\iiint_A \cos z\,d(x,y,z) = \iiint_B \cos w\,d(u,v,w)$$

mit $B = \{(u,v,w)\in\mathbb{R}^3:\ u^2+v^2\leqslant 4\ \ 0\leqslant w\leqslant\frac{\pi}{2}$
In Zylinderkoordinaten:

$$u = r\cos\varphi\,,\qquad v = r\sin\varphi\,,\qquad w = w\,,\qquad d(u,v,w) = r\,d(r,\varphi,z)\,.$$

bekommt man

$$\iiint_B \cos w\,d(u,v,w) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos w\,dw\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 r\,dr = 4\pi\,.$$

Aufgabe 4

Definiere $K = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$. Dann müssen wir

$$m := \iiint_B \varrho(x,y,z)\,d(x,y,z) = \iiint_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z)$$

berechnen. Hierzu benutzen wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\,\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\,\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta \qquad \text{mit } r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, r^2 \cos\vartheta \, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{1+r^2} \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = 4\pi \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)\, dr \\ &= 4\pi\big(1 - [\arctan r]_{r=0}^1\big) = 4\pi\big(1 - (\tfrac{\pi}{4} - 0)\big) = 4\pi - \pi^2. \end{aligned}$$