Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc. M. Ullmann

Sommersemester 2020
09.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $G = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2\big\}$ und γ der positiv orientierte Rand von G.

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von γ mittels Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G.

Aufgabe 2

Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint\limits_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}\, do\,.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0,0,1)$, falls $\mathcal{F}$ der durch $0 \le z \le 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\, dr = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\, \ln(\sqrt{2}-1)$.

Aufgabe 3

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{f} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x,y,z) = (z, y, z+1)$. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Aufgabe 4

Berechnen Sie den Flächeninhalt von $\mathcal{F} = \big\{(x,y,x^2+y^2) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leqslant 1\big\}$.