Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc. M. Ullmann

Sommersemester 2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir setzen in die Ungleichung, die G definiert, Polarkoordinaten ein, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r \geqslant 0$ und $0 \leqslant \varphi < 2\pi$:

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 < 3r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\,.$$

Wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ bedeutet das $r^4 < r^2(3+\sin^2\varphi)$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $r \neq 0$ und $r^2 < 3 + \sin^2\varphi$. Der Rand von G besteht folglich aus dem Punkt $(0,0)$ und der durch die Parametrisierung

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\,, \qquad \text{wobei} \;\; r(t) := \sqrt{3+\sin^2 t}\,,$$

gegebenen Kurve.

b) Die Leibnizsche Sektorformel liefert für den Flächeninhalt von G

$$A(G) = \tfrac12 \int_0^{2\pi} r^2(t)\,dt = \tfrac12 \int_0^{2\pi} (3+\sin^2 t)\,dt = \tfrac12(6\pi+\pi) = \tfrac72\pi\,.$$

Aufgabe 2

Eine Parametrisierung des Kegelmantels $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} =: \vec g(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi].$$

Mit

$$\big\|\partial_r \vec g(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec g(r,\varphi)\big\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt2\, r$$

und

$$\|\vec g(r,\varphi) - \vec a\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2r^2-2r+1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} U(\vec a) &= \varrho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec x - \vec a\|}\,do = \varrho \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\|\vec g(r,\varphi)-\vec a\|}\,\big\|\partial_r \vec g(r,\varphi)\times\partial_\varphi \vec g(r,\varphi)\big\|\,d(r,\varphi) \\ &= \varrho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\sqrt2\, r\,d\varphi\,dr = 2\sqrt2\,\pi\,\varrho \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\,dr \overset{\text{Hinweis}}{=} -2\pi\varrho\ln(\sqrt2-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\, z \geqslant 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) &= \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r \\
&= (2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2).
\end{aligned}$$

Für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{M} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \frac{\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)}{\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|} \,\|\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\
&= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)\big)\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\, dr = \left[\pi\,\frac{r^3}{3} + \left(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\right) 2\pi\right]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi.
\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2 \leqslant 4,\, z = 0\right\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned}\iint\limits_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint\limits_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-\partial_r \vec{g}(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r\, d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi.\end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec{f}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do + \iint\limits_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \frac{28}{3}\,\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\,\pi.$$

Bemerkung: Alternativ kann man $\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do$ auch mit dem Divergenzsatz im $\mathbb{R}^3$ (Diesen nennt man auch den *Gaußschen Integralsatz.*) berechnen:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{K} \nabla \cdot \vec{f}\, d\tau = \iiint\limits_{K} 2\, d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \varphi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= 2 \iiint\limits_{K} d(x,y,z) = 2 \int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dz\, dr \\ &= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \big[r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\,\pi.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Fläche $\mathcal{F} = \big\{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}$ liegt in expliziter Darstellung vor mit $f(x,y) = x^2 + y^2$ bzw. in Parameterdarstellung $\mathcal{F} = \{\vec{g}(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ mit

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}A(\mathcal{F}) &= \iint\limits_{\mathcal{F}} do = \iint\limits_{B} \|\partial_x \vec{g}(x,y) \times \partial_y \vec{g}(x,y)\|\, d(x,y) = \iint\limits_{B} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \right\| d(x,y) \\ &= \iint\limits_{B} \left\| \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\| d(x,y) = \iint\limits_{B} \sqrt{(\partial_x f(x,y))^2 + (\partial_y f(x,y))^2 + 1}\, d(x,y) \\ &= \iint\limits_{B} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, d(x,y).\end{aligned}$$

Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$A(\mathcal{F}) = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} \sqrt{4r^2+1}\, r\, d(r,\varphi) = 2\pi \int\limits_0^1 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr = 2\pi \big[\tfrac{1}{12}(4r^2+1)^{3/2}\big]_0^1 = \tfrac{\pi}{6}(5^{3/2} - 1).$$