Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc. M. Ullmann

Sommersemester 2020
15.07.2020

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Es sei $\partial\mathcal{F}$ der positiv orientierte Rand der Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{(x, y, y^2 - x^2) : (x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leqslant 3\right\}.$$

Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 2

Die Oberfläche von $Z := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\, 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet, und es sei

$$\vec{v}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do$$

(wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist) auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Menge

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\, z \geqslant 0\right\}$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - x \\ z^3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie den Gaußschen Integralsatz anhand dieses Beispiels, d.h. berechnen Sie

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{v}\, d(x, y, z) \qquad \text{sowie} \qquad \iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂V bezeichnet.