Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2020
Institut für Analysis
apl.Prof. Dr. P. C. Kunstmann
Dr. S. Wugalter
M.Sc. M. Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Eine Parametrisierung der Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 3 \,\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = \iint\limits_{U} (\nabla \times \vec{v})\big(\vec{g}(u,v)\big) \cdot \big(\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v)\big)\, d(u,v).$$

Nun ist

$$\partial_u \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 1-(-2) \\ 9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{U} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint\limits_{U} (8u - 6v + 14)\, d(u,v);$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} (8r\cos\varphi - 6r\sin\varphi + 14)\, r\, d\varphi\, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\, dr \\ &= 28\pi \left[\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi \cdot \tfrac{3}{2} = 42\pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$\partial_u \vec{g}(u,v) \times \partial_v \vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u\cos^2 v + u\sin^2 v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)$ durch die Norm $\|\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big)\,(-1) = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{g}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v) \in U := [0,2\pi] \times [0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist auch schon die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = \begin{pmatrix} \cos^3 u \\ \cos^2 u\, \sin u \\ v\cos^2 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u\, \sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint_U \cos^2 u\, \underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1}\, d(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2 u\, dv\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2 u\, du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{g}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 1)$ mit $(u,v) \in U := [0,1] \times [0,2\pi]$ liefert $\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{g}(u,v))\big) \cdot \big(\vec{N}(\vec{g}(u,v))\big) = v_3\big(\vec{g}(u,v)\big) = u^2\cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iint_U u^2\cos^2 v\, \underbrace{\|\partial_u\vec{g}(u,v) \times \partial_v\vec{g}(u,v)\|}_{=|u|=u,\ \text{da } u \geqslant 0}\, d(u,v) = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3\cos^2 v\, dv\, du \\ &= \left(\int_0^1 u^3\, du\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2 v\, dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \sum_{k=1}^{3} \iint_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz bzw. dem Divergenzsatz ist

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint_Z (\nabla \cdot \vec{v}\,)\, d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = \partial_x(x^3) + \partial_y(x^2y) + \partial_z(x^2z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0,2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do &= \iiint_Z 5x^2\, d(x,y,z) = \iiint_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\, r\, d(r,\varphi,z) \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 5r^3\cos^2\varphi\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^1\int_0^{2\pi} 5r^3\cos^2\varphi\, d\varphi\, dr \\ &= 5\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zur Berechnung von
$$\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec v\, d(x,y,z)$$
verwenden wir Kugelkoordinaten
$$x = r\cos\varphi\,\cos\vartheta,\;\; y = r\sin\varphi\,\cos\vartheta,\;\; z = r\sin\vartheta \quad \text{mit} \quad 0\leqslant r\leqslant 1,\, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\, 0\leqslant\vartheta\leqslant\tfrac{\pi}{2}.$$
Damit ergibt sich
$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \nabla\cdot\vec v\, d(x,y,z) &= \iiint\limits_V (2+3z^2)\, d(x,y,z) = 2\underbrace{\iiint\limits_V d(x,y,z)}_{=\frac12\,\frac43\pi\cdot 1^3,\text{ da } V \text{ Halbkugel}} +3\iiint\limits_V z^2\, d(x,y,z)\\
&= \frac43\pi + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\sin^2\vartheta\, r^2\cos\vartheta\, d\varphi\, dr\, d\vartheta\\
&= \frac43\pi + 6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^4\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\\
&= \frac43\pi + 6\pi\left(\int_0^1 r^4\, dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\vartheta\,\cos\vartheta\, d\vartheta\right)\\
&= \frac43\pi + \frac65\pi\big[\tfrac13\sin^3\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac43\pi + \frac65\pi\cdot\frac13 = \frac{26}{15}\,\pi.\end{aligned}$$
Die Oberfläche ∂V von V setzt sich zusammen aus $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$, wobei $\mathcal{F}_1$ die Kugelschalenhälfte und $\mathcal{F}_2$ die Grundkreisscheibe sind. Als Parametrisierungen nehmen wir
$$\mathcal{F}_1 = \big\{\vec g_1(\varphi,\vartheta) : \varphi\in[0,2\pi],\,\vartheta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]\big\} \qquad \text{mit } \vec g_1(\varphi,\vartheta) := \begin{pmatrix}\cos\varphi\,\cos\vartheta\\ \sin\varphi\,\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$$
(Kugelkoordinaten der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius $r=1$) und
$$\mathcal{F}_2 = \big\{\vec g_2(r,\varphi) : r\in[0,1],\,\varphi\in[0,2\pi]\big\} \qquad \text{mit } \vec g_2(r,\varphi) := \begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$
(Polarkoordinaten der Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius 1 in der xy-Ebene $z=0$). Setze
$$\vec n_1(\varphi,\vartheta) := \partial_\varphi\vec g_1(\varphi,\vartheta)\times\partial_\vartheta\vec g_1(\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\,\cos\vartheta\\ \cos\varphi\,\cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-\cos\varphi\,\sin\vartheta\\ -\sin\varphi\,\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\,\cos^2\vartheta\\ \sin\varphi\,\cos^2\vartheta\\ \cos\vartheta\,\sin\vartheta\end{pmatrix}.$$
Da die dritte Komponente von $\vec n_1(\varphi,\vartheta)$ nichtnegativ ist, zeigt $\vec n_1(\varphi,\vartheta)$ nach außen. (Achtung: $\vec n_1(\varphi,\vartheta)$ ist nicht normiert!) Für den Normaleneinheitsvektor an $\mathcal{F}_2$ nach außen ergibt sich
$$\vec N_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Aufgrund von

$$\iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}\, do = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \vec{v}(\vec{g}_1(\varphi,\vartheta)) \cdot \frac{\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)}{\|\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)\|}\, \|\vec{n}_1(\varphi,\vartheta)\|\, d(\varphi,\vartheta)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \cos\vartheta\,(\cos\varphi+\sin\varphi) \\ \cos\vartheta\,(\sin\varphi-\cos\varphi) \\ \sin^3\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi\, \cos^2\vartheta \\ \sin\varphi\, \cos^2\vartheta \\ \cos\vartheta\, \sin\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^3\vartheta\, \cos\varphi\,(\cos\varphi+\sin\varphi) + \cos^3\vartheta\, \sin\varphi\,(\sin\varphi-\cos\varphi) + \sin^4\vartheta\, \cos\vartheta\big)\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^3\vartheta + \sin^4\vartheta\, \cos\vartheta\big)\, d\vartheta\, d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos\vartheta\,(1-\sin^2\vartheta) + \sin^4\vartheta\, \cos\vartheta\big)\, d\vartheta$$

$$= \big[\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}\sin^3\vartheta + \tfrac{1}{5}\sin^5\vartheta\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}) = \tfrac{26}{15}\,\pi$$

und

$$\iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}_2\, do = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \vec{v}(\vec{g}_2(r,\varphi)) \cdot \vec{N}_2(\vec{g}_2(r,\varphi))\, \|\partial_r \vec{g}_2(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}_2(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi)$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \begin{pmatrix} r(\cos\varphi+\sin\varphi) \\ r(\sin\varphi-\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \|\partial_r \vec{g}_2(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}_2(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi)$$

$$= \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} 0\, \|\partial_r \vec{g}_2(r,\varphi) \times \partial_\varphi \vec{g}_2(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) = 0$$

erhalten wir

$$\iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint_{\mathcal{F}_1} \vec{v} \cdot \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|}\, do + \iint_{\mathcal{F}_2} \vec{v} \cdot \vec{N}_2\, do = \frac{26}{15}\,\pi.$$

Fazit: Es ist

$$\iint_{\partial V} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \frac{26}{15}\,\pi = \iiint_V \nabla \cdot \vec{v}\, d(x,y,z).$$