08.07.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik III für Elektrotechnik

Übungsklausur 2020
(Bearbeitungszeitraum 08.07. bis 12.07.2020)

Aufgabe 1 (8 + 6 + 6 = 20 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte mit ihren algebraischen Vielfachheiten.
Ist die Matrix A positiv/negativ (semi-)definit oder indefinit?

(b) Geben Sie alle zugehörigen Eigenvektoren und die geometrischen Vielfachheiten an.

(c) Ist die Matrix A orthogonal diagonalisierbar, begründen Sie ihre Antwort und geben Sie in diesem Falle eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A = UDU^T$.

Aufgabe 2 (10 + 10 = 20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^y \left(x^2 + \sin^2(x)\right) + y^2 \ln\left(|y|\right), & \text{für } y \neq 0 \\ x^2 + \sin^2(x), & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist, d.h. $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ und berechnen Sie den Gradienten ∇f auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremwerte und berechnen Sie diese. Handelt es sich in den Fällen auch um globale Extremwerte, begründen Sie ihre Antwort.

— Bitte Wenden! —

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Gegeben seien die beiden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$

$$A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 6\right\},$$
$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y = 5\right\}.$$

Weiter definieren wir den Abstand zwischen zwei nichtleeren Mengen $M_1, M_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ durch

$$d\,(M_1, M_2) := \inf\left\{\|m_1 - m_2\| : m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2\right\} \in [0, \infty).$$

Berechnen Sie den Abstand zwischen den beiden Mengen A und B (also $d\,(A, B)$) mit Hilfe des Satzes über Lagrange-Multiplikatoren. Wählen Sie dazu als Funktion $f\,(\vec{u}, \vec{v}) := \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass das Infimum existiert und in diesem Falle auch angenommen wird.

Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte)

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\iint_B \cosh\left(\frac{x}{1+y}\right) \mathrm{d}\,(x, y),$$

wobei B die Menge

$$B := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0,\ y - x \geq -1,\ y^2 - x - 1 \leq 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist.

(b) Durch die drei Eckpunkte $(0, 0)$, $(0, \pi) \in \mathbb{R}^2$ und $(\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$ sei die Dreiecksfläche $A \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_A \left(xy^2 - 2\sin(x + y)\right) \mathrm{d}\,(x, y).$$

Viel Erfolg!

Hinweise: Ihr könnt die Klausur alleine daheim bearbeiten und eure Lösungen in den Ilias-Tutoriumsgruppen bis einschließlich Sonntag, den 12.07.2020 hochladen, bitte speichert es mit eurem u****-Kürzel ab. Die jeweiligen Tutoren werden dies dann korrigieren und euch eine Korrektur per E-Mail zukommen lassen. Die Bearbeitungszeit beträgt dafür 120 Minuten, diese Zeit müssen Sie eigenverantwortlich stoppen. Als zugelassene Hilfsmittel ist "nur" die aktuelle Fassung der Formelsammlung zulässig, diese finden Sie auf der Homepage oder im Ilias.
Warnung: Es bedeutet in keinster Weise, dass die eigentliche HM II Klausur so oder so ähnlich aussehen wird, egal welche Aspekte betreffend (Aufgabenstellung, Punkteverteilung, etc.). Dies ist nur ein Vorschlag und auch das Themengebiet "Integralsatz von Stokes, Transformationsformel, Koordinatentransformation" wurde hier nicht aufgegriffen. Dazu wird es nächste Woche (13.07. bis 19.07.2020) zwei extra Aufgaben geben, wie Klausuraufgaben beispielsweise dazu aussehen könnten. Diese können aber nicht zur Korrektur abgegeben werden. Mehr dazu wird in dem kommenden Video zur Übungsklausur erklärt.