23.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

# Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

## Lösungsvorschläge zum 1. Tutoriumsblatt

### Aufgabe 1 (Gemischtes)

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

(b) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$.

(c) Sind die Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär, so ist auch deren Summe $A + B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär.

**Lösung von Aufgabe 1**

(a) Wir unterscheiden hier die beiden Fälle $n = 1$ und $n \geq 2$.
**Fall 1.**: Im Fall $n = 1$ gilt die Aussage.
Seien $A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times 1}$ zwei Matrizen, so gilt für deren Determinanten $\det(A) = a$ bzw. $\det(B) = b$. Weiter hat die Summe $A + B = \begin{pmatrix} a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{1\times 1}$ die Determinante $\det(A+B) = a + b$. Demnach folgt nun:

$$\det(A+B) = a + b = \det(A) + \det(B).$$

Dies war zu zeigen. □
**Fall 2.**: Im Fall $n \geq 2$ gilt die Aussage **nicht**.
Dies sehen wir durch beispielsweise folgendes Gegenbeispiel:
Setze die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Dann gilt für die Determinanten der beiden Matrizen $A$ und $B$ laut der Vorlesung (Determinanten von Dreiecks- bzw. Diagonalmatrizen):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \underbrace{0 \cdot \ldots \cdot 0}_{(n-1)-\text{mal}} = 1 \cdot 0 = 0 \text{ und } \det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{(n-1)-\text{mal}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Andererseits gilt für die Summe

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

und weiter für die Determinante

$$\det(A+B) = \det(I_n) = 1$$

per Definition (Normiertheit). Zusammengefasst haben wir nun:

$$\det(A+B) = 1 \neq 0 = 0 + 0 = \det(A) + \det(B).$$

□

(b) Wir zeigen die Aussage:
Seien dazu $\lambda \in \mathbb{K}$ fest und $A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\vec{a}_1 & \dots & \lambda\vec{a}_n \end{pmatrix}.$$

Wegen der Multilinearität der Determinantenfunktion det folgt nun:

$$\det(\lambda A) = \det(\lambda\vec{a}_1, \dots, \lambda\vec{a}_n) = \lambda \det(\vec{a}_1, \lambda\vec{a}_2, \dots, \lambda\vec{a}_n) = \dots = \underbrace{\lambda \cdot \ldots \cdot \lambda}_{n-\text{mal}} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \lambda^n \det(A).$$

Dies war zu zeigen. □

(c) Diese Aussage gilt **nicht**.
Sei dazu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix, und setzen wir $B = -A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so ist auch $B$ eine unitäre Matrix, denn es gilt:

$$\begin{aligned} B^* &= \overline{B}^T = \overline{(-A)}^T = \left(-\overline{A}\right)^T = -\overline{A}^T = -A^* \\ &= -A^{-1} = \frac{1}{-1}A^{-1} = (-A)^{-1} = B^{-1}. \end{aligned}$$

Allerdings ist die Matrix $0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nicht unitär, da sie nicht regulär ist, aber es ist

$$A + B = A - A = 0 \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

d.h. die Summe $A+B$ ist nicht unitär. □

## Aufgabe 2 (Cramersche Regel)

Gegeben seien

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } \vec{b} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von der Matrix $A$. Ist die Matrix $A$ regulär? Begründen Sie.

(b) Lösen Sie mittels der Cramerschen Regel das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.

### Lösung von Aufgabe 2

(a) Laut der Vorlesung verändern Spaltenumformungen den Wert der Determinante nicht, deswegen gilt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der dritten Zeile, erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A_\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= +0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 0 + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-6) - 1 \cdot 6) = -(-6 - 6) = - \cdot (-12) = 12. \end{aligned}$$

Abschließend gilt:

$$\det(A) = 12$$

ist. Damit ist die Matrix $A$ regulär/ invertierbar, da die Determinante ungleich null ($\det(A) = 12 \neq 0$) ist. □

(b) **Schritt 1.** Invertierbarkeit der Matrix $A$

Die Matrix $A$ ist nach Aufgabenteil (a) invertierbar. Setze

$$A =: \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{pmatrix}$$

mit Vektoren

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3.$$

**Schritt 2.** Benötigte Determinanten berechnen

Für die Anwendung der Cramerschen Regel benötigen wir folgende drei Determinanten:

$$\begin{aligned} D_1 &:= \det\left(\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right), \\ D_2 &:= \det\left(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3\right), \\ D_3 &:= \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}\right). \end{aligned}$$

**Schritt 2.1** Determinante $D_1$ berechnen

Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} D_1 = \det\left(\vec{b}, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= +0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 0 - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 = -(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) = -(-6 - 3) = -(-6) = 6. \end{aligned}$$

Also lautet die Determinante $D_1 = 6$.
**Schritt 2.2** Determinante $D_2$ berechnen
Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} D_2 = \det\left(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{a}_3\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= -0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \\ = -0 + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 = (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = -1. \end{aligned}$$

Also lautet die Determinante $D_2 = -1$.
**Schritt 2.3** Determinante $D_3$ berechnen
Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der dritten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} D_3 = \det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= +0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ = 0 - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -\left((-2) \cdot 1 - 1 \cdot 3\right) = -\left(-2 - 3\right) = -\left(-5\right) = 5. \end{aligned}$$

Also lautet die Determinante $D_3 = 5$.
**Schritt 3.** Aufstellen der Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$
Laut der (zweiten) Cramerschen Regel gilt für die Lösung $\vec{x}$ des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{D_1}{\det(A)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}, \\ x_2 &= \frac{D_2}{\det(A_\lambda)} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12} \in \mathbb{R}, \\ x_3 &= \frac{D_3}{\det(A_\lambda)} = \frac{5}{12} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also löst der Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

löst das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$. $\square$

## Aufgabe 3 (Gram-Schmidt Verfahren & Orthogonale Matrizen)

Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig zueinander sind.

(b) Führen Sie mit den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ das Gram-Schmidt Verfahren durch. Was für Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ haben Sie hiermit erhalten?

(c) Ergänzen Sie die beiden Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ durch einen dritten Vektor $\vec{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Ist dieser Vektor eindeutig? Falls nicht, geben Sie alle möglichen Vektoren an.

### Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1.** $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig.
Wir setzen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Zu zeigen: $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$ als Lösung.
Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus erhalten wir somit:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix} + \quad + \\ \cdot 1 \quad \mid \cdot(-1) \\ \cdot 1 \quad \mid \cdot(-1)\end{matrix} \to \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix},$$

d.h. nur $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^2$ löst $A\vec{x} = \vec{0}$ und somit sind $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig.
(b) **Schritt 2.** Das Gram-Schmidt Verfahren
$k = 1$: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\vec{c}_1 := \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_1$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_1$:

$$\|\vec{c}_1\| = \sqrt{|1|^2 + |-1|^2 + |0|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$$

und weiter ist

$$\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle = \|\vec{c}_1\|^2 = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Also ist nun der Vektor $\vec{b}_1$ gegeben durch

$$\vec{b}_1 := \frac{1}{\|\vec{c}_1\|}\vec{c}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

$k = 2$: Nach dem Algorithmus für das Gram-Schmidt Verfahren gilt

$$\vec{c}_2 := \vec{v}_2 - \sum_{j=1}^{2-1} \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_j \rangle}{\langle \vec{c}_j, \vec{c}_j \rangle}\vec{c}_j = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle}\vec{c}_1.$$

Für die Bestimmung des Vektors $\vec{c}_2$ fehlt nur noch der Wert des Skalarproduktes $\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle$:

$$\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot \overline{1} + 0 \cdot \overline{(-1)} + (-1) \cdot \overline{0} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Demnach erhalten wir eingesetzt in die obere Formel für den Vektor $\vec{c}_2$:

$$\vec{c}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{c}_1 \rangle}{\langle \vec{c}_1, \vec{c}_1 \rangle} \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-(-1) \\ -2-0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Für die Berechnung des Vektors $\vec{b}_2$ benötigen wir nun noch die Norm vom Vektor $\vec{c}_2$:

$$\|\vec{c}_2\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{1}{2} \right| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{|1|^2 + |1|^2 + |-2|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1+1+4} = \frac{1}{2} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

wegen der Homogenität der Normfunktion $\|\cdot\|$. Also ist nun der Vektor $\vec{b}_2$ gegeben durch

$$\vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|} \vec{c}_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zusammenfassend gilt nun:

$$U := \operatorname{lin} \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \operatorname{lin} \left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2 \right\}$$

und $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ sind orthonormal zueinander. □

(c) **Schritt 1.** Aufstellen von Gleichungen zur Berechnung von $\vec{b}_3$.
Da der Vektor $\vec{b}_3$ insbesondere orthogonal zu den Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ sein soll, erhalten wir für einen Vektor $(a,b,c)^T \in \mathbb{R}^3$ die beiden Bedingungen:

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{b}_1 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( a \cdot \overline{1} + b \cdot \overline{(-1)} + c \cdot \overline{0} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (a \cdot 1 + b \cdot (-1) + c \cdot 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a - b + 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a - b),$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{b}_2 \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{\left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right)} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( a \cdot \overline{1} + b \cdot \overline{1} + c \cdot \overline{(-2)} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot (-2)) = \frac{1}{\sqrt{6}} (a + b + -2c),$$

da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der zweiten Komponente antilinear ist. Durch Multiplizieren der ersten Gleichung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ und die zweite Gleichung mit dem Faktor $\sqrt{6}$ erhalten wir folgendes lineares Gleichungssystem

$$a - b = 0,$$
$$a + b - 2c = 0.$$

**Schritt 2.** Lösen des obigen linearen Gleichungssystems
Aus der ersten Gleichung bekommen wir:

$$a - b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = b$$

und aus der zweiten folgt damit:

$$a + b - 2c = 0 \ \Leftrightarrow \ 2c = a + b \ \Leftrightarrow \ 2c = a + a \ \Leftrightarrow \ 2c = 2a \ \Leftrightarrow \ c = a.$$

D.h. als Lösung ergibt sich nun:

$$a = c \in \mathbb{R}, \ b = a = c \in \mathbb{R} \text{ und } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Aus der Bedingung, dass der Vektor $\vec{b}_3$ normiert sein soll, d.h. $\left\| \vec{b}_3 \right\| = 1$ sein soll, folgt, dass $\vec{b}_3 \neq \vec{0}$ gewählt werden soll, demnach müssen wir $c \neq 0$ fordern, denn sonst wäre

$$a = c = 0, \ b = c = 0 \text{ und } c = 0.$$

Wir wählen

$$c = t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \text{ für } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Dann ist:

$$a = c = t,\ b = c = t,\ c = t,$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \in \mathbb{R}^3 \text{ für } t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

**Schritt 3.** Normiertheit von $\vec{b}_3$
Es gilt nun für die Norm des Vektors $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} N(t) := \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \right\| = |t| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= |t| \sqrt{|1|^2 + |1|^2 + |1|^2} = |t| \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = |t| \sqrt{1+1+1} = |t| \sqrt{3} = \sqrt{3}\, |t|\,, \end{aligned}$$

wegen der Homogenität der Normfunktion $\|\cdot\|$.
**Schritt 4.** Vektor $\vec{b}_3$ aufstellen
Wir können nun den Vektor $\vec{b}_3$ folgendermaßen definieren:

$$\vec{b}_3(t) := \frac{1}{N(t)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}\,|t|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{t}{|t|} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, bzw. da

$$\frac{t}{|t|} \in \{-1, 1\} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \text{ ist,}$$

gibt es genau zwei verschiedene Vektoren $\vec{b}_3$:

$$\vec{b}_3^{(-)} := -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{b}_3^{(+)} := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

die die Anforderungen erfüllen. Damit ist $\vec{b}_3$ nicht eindeutig, denn ansonsten müsste

$$\vec{b}_3^{(-)} = \vec{b}_3^{(+)} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gelten, was wegen $0 \neq \frac{2}{\sqrt{3}}$ nicht der Fall sein kann. Zusammenfassend gilt nun:

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3^{(-)}\right\} = \operatorname{lin}\left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3^{(+)}\right\}$$

und $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3^{(-)}$ bzw. $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3^{(+)}$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. □

## Aufgabe 4 (Knobelaufgabe (freiwillig))

Gegeben sei die Matrix

$$A_n := \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Schreiben Sie sich die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ einmal auf. Was ergibt sich für die Determinante in diesen Fällen? Was ist die Determinante der Matrix $A_n$? Beweisen Sie ihre Vermutung.

**Lösung von Aufgabe 4**

$\underline{n = 1}$: Aus $A_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ folgt für die Determinante:

$$\det(A_1) = 1.$$

$\underline{n = 2}$: Laut Vorlesung folgt nun für die Determinante der Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot 0 - 1\cdot 1 = 0 - 1 = -1.$$

$\underline{n = 3}$: Nach der Regel von Sarrus erhalten wir für die Determinante der Matrix $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$\begin{aligned} \det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= 0\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 0\cdot 0 \\ &= 0 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = -1. \end{aligned}$$

$\underline{n = 4}$: Sei die Matrix

$$A_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben. Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A_4) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} &= +0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= +0 - 0 + 0 - \det(A_3) = -(-1) = 1. \end{aligned}$$

**Vermutung**: Für $n \in \mathbb{N}$ mit der Darstellung $n = 2k$ oder $n = 2k+1$ für $k \in \mathbb{N}_0$ folgt nun:

$$\det(A_n) = (-1)^k.$$

**Beweis** (per vollständiger Induktion über $k$):
*Induktionsanfang (I.A.)* $k = 0, 1$: Es gilt, wie wir oben schon berechnet haben:

$$\begin{aligned} \det(A_{2\cdot 0+1}) = \det(A_{0+1}) = \det(A_1) = 1 = (-1)^0, \\ \det(A_{2\cdot 1}) = \det(A_2) = -1 = (-1)^1, \\ \det(A_{2\cdot 1+1}) = \det(A_{2+1}) = \det(A_3) = -1 = (-1)^1. \end{aligned}$$

*Induktionsvoraussetzung (I.V.)*: Sei $k \in \mathbb{N}$ fest, aber beliebig und für dieses $k$ gelte:

$$\det(A_{2k}) = \det(A_{2k+1}) = (-1)^k.$$

*Induktionsschluss (I.S.)*:
**Bemerkung**: Die Summanden, welche eine Null als Vorfaktor haben, werden nun gesammelt mit $\pm 0$ bezeichnet. Mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Spalte, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det\left(A_{2(k+1)}\right) = \det\left(A_{2k+2}\right) &= \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{(2k+2)\times(2k+2)-\text{Matrix}} = \pm 0 + (-1)^{(2k+2)+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{(2k+1)\times(2k+1)-\text{Matrix}} \\
&= (-1)^{2k+3} \det\left(A_{2k+1}\right) = -(-1)^{k} = (-1)^{k+1}\,, \\
\det\left(A_{2(k+1)+1}\right) = \det\left(A_{2k+2+1}\right) = \det\left(A_{2k+3}\right) &= \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{(2k+3)\times(2k+3)-\text{Matrix}} = \pm 0 + (-1)^{(2k+3)+1} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 1 & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}_{(2k+2)\times(2k+2)-\text{Matrix}} \\
&= (-1)^{2k+4} \det\left(A_{2k+2}\right) = \det\left(A_{2(k+1)}\right) = (-1)^{k+1}\,.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. $\square$