29.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

2. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Kreuz- & Spatprodukt)

Gegeben seien die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{v}_3 := \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ der beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Was sagt dies über die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aus? Wie steht $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ zu den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie das Spatprodukt $\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$. Was beschreibt dieses?

(c) Was beschreibt $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$? Und berechnen Sie diesen Wert. Geben Sie zusätzlich einen Ausdruck für den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ an.

Aufgabe 2 (Eigenwertberechnung)

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3} \text{ und } B := \begin{pmatrix}6 & -2 & 4\\0 & 5 & 0\\-2 & 4 & -3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen A und B, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Welche der beiden Matrizen ist diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort, und geben Sie im Falle von Diagonalisierbarkeit die entsprechende reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times3}$ und die Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times3}$ an mit $A = SDS^{-1}$ bzw. $B = SDS^{-1}$.

Aufgabe 3 (Zwei kleine Beweise)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix A, so ist $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix $\overline{A}$.
In diesem Fall gilt für die Eigenräume:

$$E_{\overline{A}}\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{E_A(\lambda)}.$$

(b) Für das Spatprodukt gilt:

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \text{ für alle Vektoren } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Was folgern Sie aus Aufgabenteil (a) für reellwertige Matrizen, d.h. im Fall von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Aufgabe 4 (Besondere Eigenvektoren)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort, und geben Sie im Falle von Diagonalisierbarkeit die entsprechende reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und die Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an mit $A = SDS^{-1}$.

(c) Was ist das besondere an den Eigenvektoren? Welche Auswirkungen hat das auf die Matrix S?