29.04.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Kreuz- & Spatprodukt)

Gegeben seien die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ und } \vec{v}_3 := \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ der beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. Was sagt dies über die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aus? Wie steht $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ zu den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$? Begründen Sie jeweils ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie das Spatprodukt $\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$. Was beschreibt dieses?

(c) Was beschreibt $\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$? Und berechnen Sie diesen Wert. Geben Sie zusätzlich einen Ausdruck für den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ an.

Lösung von Aufgabe 1

(a) Wir berechnen das Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 2 - 1\cdot 1\\1\cdot 0 - 1\cdot 2\\1\cdot 1 - 0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-1\\0-2\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$$

folgt nun laut Vorlesung, dass die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ linear unabhängig sind.
Weiter steht das Kreuzprodukt $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ per Definition orthogonal zu den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$. $\square$

(b) Da das Spatprodukt zyklisch ist, erhalten wir per Definition:

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle.$$

Mit dem berechneten Kreuzprodukt aus Aufgabenteil (a) gilt nun

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} \right\rangle = (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 1\cdot 7 = -2 - 2 + 7 = 3.$$

Da nun das Spatprodukt $\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = 3 > 0$ ist, bilden die Vektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1$ ein Rechtssystem. Das Volumen V des von den drei Vektoren $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1$ aufgespannten Spats beträgt per Definition:

$$V = |\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)| = |3| = 3.$$

$\square$

(c) **Norm vom Kreuzprodukt**: Die Norm des Kreuzproduktes $F := \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|$ beschreibt den Flächeninhalt F vom Parallelogramm, welches von den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannt wird. Dieser Flächeninhalt F beträgt:

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|-1|^2 + |-2|^2 + |1|^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ aufgespannten Parallelogramms beträgt nun

$$F = \|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\| = \sqrt{6}.$$

Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$: Die Berechnung des Winkels $\varphi \in [0, 2\pi)$ erfolgt mit folgender Beziehung zwischen dem Skalarprodukt und der Norm im euklidischen Raum:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \cos(\varphi).$$

Für den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen wir zuerst:

$$\|\vec{v}_1\|, \|\vec{v}_2\|, \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle.$$

Schritt 1. Normen von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ berechnen: Es gilt für die Norm vom Vektor $\vec{v}_1$:

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |1|^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}.$$

Es gilt für die Norm vom Vektor $\vec{v}_2$:

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |2|^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5}.$$

Schritt 2. Skalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen: Es gilt für das Skalarprodukt zwischen den beiden Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$:

$$\langle \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 0 + 0 + 2 = 2.$$

Winkel φ zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen: Laut der anfangs erwähnten Beziehung im euklidischen Raum erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\| \cos(\varphi) \;\Leftrightarrow\; \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \, \|\vec{v}_2\|} \;\Leftrightarrow\; \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} \;\Leftrightarrow\; \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot 5}} \\ &\Leftrightarrow\; \cos(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{10}} \;\Leftrightarrow\; \varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right).\end{aligned}$$

Damit lautet der Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ gerade

$$\varphi = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) \approx 0{,}89 \hat{\approx} 50{,}8^\circ.$$

$\square$

Aufgabe 2 (Eigenwertberechnung)

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen A und B, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Welche der beiden Matrizen ist diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort, und geben Sie im Falle von Diagonalisierbarkeit die entsprechende reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und die Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an mit $A = SDS^{-1}$ bzw. $B = SDS^{-1}$.

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** Charakteristische Polynome p_A, p_B aufstellen
Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ laut der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(1-\lambda) + (-1)\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 - 1\cdot(1-\lambda)\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot(2-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 1\cdot(-1) \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 0 + 0 - (1-\lambda) - 0 + (1-\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2. \end{aligned}$$

Charakteristisches Polynom p_B: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} + (5-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 6-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -0 + (5-\lambda)\left((6-\lambda)\cdot(-3-\lambda) - (-2)\cdot 4\right) + 0 = (5-\lambda)\left(\left(-18 + 3\lambda - 6\lambda + \lambda^2\right) + 8\right) \\ &= (5-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 10\right) = (5-\lambda)\left((-2)-\lambda\right)(5-\lambda) = \left((-2)-\lambda\right)(5-\lambda)^2, \end{aligned}$$

da z.B. nach der Mitternachtsformel gilt:

$$\begin{aligned} &0 = \lambda^2 - 3\lambda - 10 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-10)}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm 7}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3-7}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{3+7}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-4}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{10}{2} \Leftrightarrow \lambda = -2 \text{ oder } \lambda = 5. \end{aligned}$$

Schritt 2. Eigenwerte der Matrizen A und B aufstellen
Eigenwerte der Matrix A: Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{1, 2\}.$$

Damit hat die Matrix A nun zwei Eigenwerte

$$\lambda_1 := 1 \text{ und } \lambda_2 := 2,$$

wobei $\lambda_1 = 1$ ein doppelter Eigenwert (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_1 = 2$) und $\lambda_2 = 2$ ein einfacher Eigenwert (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_2 = 1$) der Matrix A ist.
Eigenwerte der Matrix B: Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } B \Leftrightarrow p_B(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \left((-2)-\lambda\right)(5-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 5\}.$$

Damit hat die Matrix B nun zwei Eigenwerte

$$\lambda_1 := -2 \text{ und } \lambda_2 := 5,$$

wobei $\lambda_1 = -2$ ein einfacher Eigenwert (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_1 = 1$) und $\lambda_2 = 5$ ein doppelter Eigenwert (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_2 = 2$) der Matrix B ist.

Schritt 3. Eigenvektoren berechnen

Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 der Matrix A:

<u>Fall 1. $\lambda_1 = 1$</u>: Der Eigenraum $E_A(1)$ lautet:

$$E_A(1) = \ker(A - 1 \cdot I_3) = \ker(A - I_3) = \ker\begin{pmatrix} 2-1 & -1 & 1 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \quad \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \mid \cdot(-1) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim(E_A(1)) = 1.$$

<u>Fall 2. $\lambda_2 = 2$</u>: Der Eigenraum $E_A(2)$ lautet:

$$E_A(2) = \ker(A - 2 \cdot I_3) = \ker\begin{pmatrix} 2-2 & -1 & 1 \\ 1 & 1-2 & 0 \\ 1 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot(-1) \\ \end{matrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} \mid \cdot(-1) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim(E_A(2)) = 1.$$

Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 der Matrix B:

<u>Fall 1. $\lambda_1 = -2$</u>: Der Eigenraum $E_B(-2)$ lautet:

$$E_B(-2) = \ker(B - (-2) \cdot I_3) = \ker(B + 2I_3) = \ker\begin{pmatrix} 6+2 & -2 & 4 \\ 0 & 5+2 & 0 \\ -2 & 4 & -3+2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \cdot\frac{2}{7} \quad \cdot(-\frac{4}{7}) \mid \cdot\frac{1}{7} \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \\ \cdot 4 \mid \cdot(-\frac{1}{2}) \end{matrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim(E_B(-2)) = 1.$$

<u>Fall 2. $\lambda_2 = 5$</u>: Der Eigenraum $E_B(5)$ lautet:

$$E_B(5) = \ker(B - 5 \cdot I_3) = \ker\begin{pmatrix} 6-5 & -2 & 4 \\ 0 & 5-5 & 0 \\ -2 & 4 & -3-5 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$= \ker\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim(E_B(5)) = 2.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = 1,$$
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2 = 2.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix B lauten nun:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = -2,$$
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda_2 = 5.$$

(b) **Diagonalisierbarkeit der Matrix** A: Die Matrix A ist <u>nicht</u> diagonalisierbar, da bei nicht allen Eigenwerten die geometrische Vielfachheiten mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, genauer:
Beim Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gilt $m_1 = 1 < 2 = k_1$.
Diagonalisierbarkeit der Matrix B: Die Matrix B ist diagonalisierbar, da bei allen Eigenwerten die geometrische Vielfachheit mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt, genauer:

- $\lambda_1 = -2$: $m_1 = 1 = k_1$.
- $\lambda_2 = 5$: $m_2 = 2 = k_2$.

Für die Matrix B setzen wir die reguläre Matrix S:

$$S := \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Für die Matrix B setzen wir die Diagonalmatrix D:

$$D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

da $\lambda_2 = 5$ ein doppelter EIgenwert ist. Damit gilt nun, dass die Matrix B ähnlich zu D ist, d.h.

$$B = SDS^{-1}.$$

□

Aufgabe 3 (Zwei kleine Beweise)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix A, so ist $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix $\overline{A}$.
In diesem Fall gilt für die Eigenräume:

$$E_{\overline{A}}\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{E_A(\lambda)}.$$

(b) Für das Spatprodukt gilt:

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) \text{ für alle Vektoren } \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Was folgern Sie aus Aufgabenteil (a) für reellwertige Matrizen, d.h. im Fall von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?

Lösung von Aufgabe 3

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix A, so finden wir ein einen Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$ mit

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Setze $\vec{w} := \overline{\vec{v}} \in \mathbb{C}^n \setminus \left\{\vec{0}\right\}$. Dann gilt:

$$\overline{A}\vec{w} = \overline{A}\overline{\vec{v}} = \overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}} = \overline{\lambda}\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\vec{w},$$

d.h. $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ist ein Eigenwert der Matrix $\overline{A}$ mit dem Eigenvektor $\vec{w} = \overline{\vec{v}}$. Weiter gilt dadurch, und weil $\vec{0}$ stets im Eigenraum enthalten ist, dass

$$E_{\overline{A}}\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{E_A(\lambda)}$$

ist. $\square$

Im Fall von $A = \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $\overline{A} = A$, und somit ist zu jedem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ der Matrix A auch das komplex-konjugierte $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der Matrix A und die Eigenvektoren unterschieden sich ebenfalls nur über die komplexe Konjugation, genauer gilt:

$$E_A\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{E_A(\lambda)}$$

(b) Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ drei beliebige Vektoren. Aus der Vorlesung wissen wir, dass für das Spatprodukt auch die Determinantendarstellung gilt, genauer:

$$\operatorname{spat}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \text{ für alle Vektoren } \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Determinantenabbildung det ist eine alternierende Abbildung, deswegen erhalten wir durch Vertauschung der Spalten:

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -\det(\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1) = (-1)\cdot(-1)\cdot\det(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1)$$

und

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = -\det(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2) = (-1)\cdot(-1)\cdot\det(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

Zusammengefasst erhalten wir somit die Behauptung:

$$\operatorname{spat}(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = \operatorname{spat}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \operatorname{spat}(\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2).$$

$\square$

Aufgabe 4 (Besondere Eigenvektoren)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Begründen Sie ihre Antwort, und geben Sie im Falle von Diagonalisierbarkeit die entsprechende reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und die Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ an mit $A = SDS^{-1}$.

(c) Was ist das besondere an den Eigenvektoren? Welche Auswirkungen hat das auf die Matrix S?

Lösung von Aufgabe 4

(a) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_A aufstellen
Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 12 \\ 12 & -2-\lambda \end{vmatrix} &= (5-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - 12\cdot 12 = -10 + 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 144 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 154 = ((-11)-\lambda)(14-\lambda), \end{aligned}$$

da z.B. nach der Mitternachtsformel gilt:

$$\begin{aligned} &0 = \lambda^2 - 3\lambda - 154 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-154)}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+616}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{3\pm\sqrt{625}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3\pm 25}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3-25}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{3+25}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-22}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{28}{2} \Leftrightarrow \lambda = -11 \text{ oder } \lambda = 14. \end{aligned}$$

Schritt 2. Eigenwerte der Matrix A aufstellen
Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow ((-11)-\lambda)(14-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-11, 14\}.$$

Damit hat die Matrix A nun die zwei Eigenwerte

$$\lambda_1 := -11 \text{ und } \lambda_2 := 14,$$

mit jeweils algebraischer Vielfachheit $k_1 = k_2 = 1$.
Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnen
<u>Fall 1. $\lambda_1 = -11$</u>: Der Eigenraum $E_A(-11)$ lautet:

$$\begin{aligned} E_A(-11) = \ker(A - (-11)\cdot I_2) = \ker(A + 11 I_3) = \ker \begin{pmatrix} 5+11 & 12 \\ 12 & -2+11 \end{pmatrix} &= \ker \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{4} \\ \mid \cdot \frac{1}{3} \end{matrix} \\ = \ker \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \mid \cdot \frac{1}{4} \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim(E_A(-11)) = 1.$$

<u>Fall 2. $\lambda_2 = 14$</u>: Der Eigenraum $E_A(14)$ lautet:

$$\begin{aligned} E_A(14) = \ker(A - 14\cdot I_3) = \ker \begin{pmatrix} 5-14 & 12 \\ 12 & -2-14 \end{pmatrix} &= \ker \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \mid \cdot \frac{1}{4} \end{matrix} \\ = \ker \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \mid \cdot \frac{1}{3} \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim\left(E_A\left(14\right)\right) = 1.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = -11, \\ \vec{v}_2 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_2 = 14.\end{aligned}$$

(b) **Diagonalisierbarkeit der Matrix** A: Die Matrix A ist diagonalisierbar, da A eine 2×2-Matrix ist und zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = -11$ und $\lambda_2 = 14$ hat. Für die Matrix A setzen wir die reguläre Matrix S:

$$S := \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Für die Matrix A setzen wir die Diagonalmatrix D:

$$D := \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = \begin{pmatrix} -11 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Damit gilt nun, dass die Matrix A ähnlich zu D ist, d.h.

$$A = SDS^{-1}.$$

□(c) Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass die beiden Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthogonal zueinander stehen, denn es gilt für deren Skalarprodukt:

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 12 - 12 = 0.$$

Damit stehen auch die Eigenräume $E_A\left(-11\right)$ und $E_A\left(14\right)$ zueinander orthogonal. Normieren wir nun die Eigenvektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so erhalten wir eine orthogonale Matrix S, denn aus

$$\begin{aligned}\|\vec{v}_1\| &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|3|^2 + |-4|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \\ \|\vec{v}_2\| &= \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|4|^2 + |3|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

erhalten wir für die Matrix

$$\widetilde{S} := \left(\tfrac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1, \tfrac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 \right) = \left(\tfrac{1}{5}\vec{v}_1, \tfrac{1}{5}\vec{v}_2 \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \right) = \frac{1}{5} S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

dass $A = \widetilde{S}D\widetilde{S}^{-1}$ ist und die Matrix $\widetilde{S}$ ist orthogonal. Die Orthogonalität können wir z.B. einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned}\det\left(S\right) &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25, \\ \widetilde{S}^{-1} &= \left(\frac{1}{5}S\right)^{-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} S^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{\det\left(S\right)} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{5}{25} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \right)^T = \widetilde{S}^T.\end{aligned}$$

□