07.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Unitär Diagonalisierbar)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i} & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A normal ist.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(c) Begründen Sie, dass die Matrix A unitär diagonalisierbar ist, d.h. es existiert eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ mit $A = UDU^*$.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** Adjungierte Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ausrechnen
Es gilt für die adjungierte Matrix

$$A^* = \overline{A}^T = \overline{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i} & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i} \end{pmatrix}}^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1-4\mathrm{i} & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ 0 & -5\mathrm{i} & 0 \\ -2+2\mathrm{i} & 0 & -4-\mathrm{i} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1-4\mathrm{i} & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ 0 & -5\mathrm{i} & 0 \\ -2+2\mathrm{i} & 0 & -4-\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Schritt 2. AA^* berechnen
Es gilt für das Produkt AA^*:

$$\begin{aligned}
AA^* &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i} & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1-4\mathrm{i} & 0 & -2+2\mathrm{i} \\ 0 & -5\mathrm{i} & 0 \\ -2+2\mathrm{i} & 0 & -4-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} (-1+4\mathrm{i})\cdot(-1-4\mathrm{i}) + (-2-2\mathrm{i})\cdot(-2+2\mathrm{i}) & 0 & (-1+4\mathrm{i})\cdot(-2+2\mathrm{i}) + (-2-2\mathrm{i})\cdot(-4-\mathrm{i}) \\ 0 & 5\mathrm{i}\cdot(-5\mathrm{i}) & 0 \\ (-2-2\mathrm{i})\cdot(-1-4\mathrm{i}) + (-4+\mathrm{i})\cdot(-2+2\mathrm{i}) & 0 & (-2-2\mathrm{i})\cdot(-2+2\mathrm{i}) + (-4+\mathrm{i})\cdot(-4+\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 1-4\mathrm{i}+4\mathrm{i}+16+4+4\mathrm{i}-4\mathrm{i}+4 & 0 & 2-8\mathrm{i}-2\mathrm{i}-8+8+8\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2 \\ 0 & 25 & 0 \\ 2+8\mathrm{i}+2\mathrm{i}-8+8-2\mathrm{i}-8\mathrm{i}-2 & 0 & 4+4\mathrm{i}-4\mathrm{i}+4+16+4\mathrm{i}-4\mathrm{i}+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,
\end{aligned}$$

da $\mathrm{i}^2 = -1$ ist.
Schritt 3. A^*A berechnen
Wegen

$$AA^* = I_3$$

erhalten wir direkt, dass

$$A^* = A^{-1}$$

ist (dies heißt auch, dass die Matrix A unitär ist). Damit gilt nun:

$$A^*A = A^{-1}A = I_3.$$

Schritt 4. AA^* und A^*A vergleichen
Es gilt nun:

$$AA^* = I_3 = A^*A,$$

d.h. die Matrix A ist normal. Dies war zu zeigen. $\square$

(b) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_A aufstellen
Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, da die Determinantenabbildung det multilinear ist:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det\left(\frac{1}{5}(5A - 5\lambda I_3)\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det(5A - 5\lambda I_3) \\ &= \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} -1+4\mathrm{i}-5\lambda & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i}-5\lambda & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i}-5\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} -1+4\mathrm{i}-5\lambda & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i}-5\lambda & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i}-5\lambda \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{5^3}\left[-0\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & -4+\mathrm{i}-5\lambda \end{vmatrix} + (5\mathrm{i}-5\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -1+4\mathrm{i}-5\lambda & -2-2\mathrm{i} \\ -2-2\mathrm{i} & -4+\mathrm{i}-5\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1+4\mathrm{i}-5\lambda & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 \end{vmatrix}\right] \\ &= \frac{1}{5^3}\cdot\left[-0 + 5\cdot(\mathrm{i}-\lambda)\left((-1+4\mathrm{i}-5\lambda)\cdot(-4+\mathrm{i}-5\lambda) - (-2-2\mathrm{i})\cdot(-2-2\mathrm{i})\right) - 0\right] \\ &= \frac{1}{5^2}(\mathrm{i}-\lambda)\left(4-\mathrm{i}+5\lambda-16\mathrm{i}-4-20\mathrm{i}\lambda+20\lambda-5\mathrm{i}\lambda+25\lambda^2-(4+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}-4)\right) \\ &= \frac{1}{5^2}(\mathrm{i}-\lambda)\left(25\lambda^2+25(1-\mathrm{i})\lambda-17\mathrm{i}-8\mathrm{i}\right) = \frac{1}{25}(\mathrm{i}-\lambda)\left(25\lambda^2+25(1-\mathrm{i})\lambda-25\mathrm{i}\right) \\ &= \frac{1}{25}(\mathrm{i}-\lambda)\cdot 25\cdot\left(\lambda^2+(1-\mathrm{i})\lambda-\mathrm{i}\right) = (\mathrm{i}-\lambda)\cdot(\mathrm{i}-\lambda)\cdot((-1)-\lambda) = ((-1)-\lambda)(\mathrm{i}-\lambda)^2, \end{aligned}$$

da $\mathrm{i}^2 = -1$ ist und wir z.B. laut der Mitternachtsformel

$$\begin{aligned} 0 = \lambda^2 + (1-\mathrm{i})\lambda - \mathrm{i} &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-(1-\mathrm{i}) \pm \sqrt{(1-\mathrm{i})^2 - 4\cdot 1\cdot(-\mathrm{i})}}{2\cdot 1} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}\pm\sqrt{1-2\mathrm{i}-1+4\mathrm{i}}}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}\pm\sqrt{2\mathrm{i}}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}\pm(1+\mathrm{i})}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}-(1+\mathrm{i})}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}+(1+\mathrm{i})}{2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}-1-\mathrm{i}}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{-1+\mathrm{i}+1+\mathrm{i}}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2\mathrm{i}}{2} \text{ oder } \lambda = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ oder } \lambda = \mathrm{i} \end{aligned}$$

haben, wobei für $\sqrt{2\mathrm{i}} = \pm(1+\mathrm{i})$ gilt.
Schritt 2. Eigenwerte der Matrix A aufstellen
Eigenwerte der Matrix A: Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \Leftrightarrow p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow ((-1)-\lambda)(\mathrm{i}-\lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, \mathrm{i}\}.$$

Damit hat die Matrix A nun zwei Eigenwerte

$$\lambda_1 := -1 \text{ und } \lambda_2 := \mathrm{i},$$

wobei $\lambda_1 = -1$ ein einfacher Eigenwert (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_1 = 1$) und $\lambda_2 = \mathrm{i}$ ein doppelter Eigenwert (d.h. für die algebraische Vielfachheit gilt $k_2 = 2$) der Matrix A ist.

Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ berechnen
Eigenvektoren zu λ_1 und λ_2 der Matrix A:
<u>Fall 1. $\lambda_1 = -1$</u>: Der Eigenraum $E_A(-1)$ lautet, da dieser ein Untervektorraum des $\mathbb{C}^3$ ist:

$$\begin{aligned}
E_A(-1) &= \ker(A - (-1) \cdot I_3) = \ker(A + I_3) = \ker(5A + 5I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1+4\mathrm{i}+5 & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i}+5 & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i}+5 \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 4+4\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5+5\mathrm{i} & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4(1+\mathrm{i}) & 0 & -2(1+\mathrm{i}) \\ 0 & 5(1+\mathrm{i}) & 0 \\ -2(1+\mathrm{i}) & 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \frac{1}{2(1+\mathrm{i})} \\ \mid \cdot \frac{1}{5(1+\mathrm{i})} \\ \mid \cdot \frac{1}{1+\mathrm{i}} \end{matrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 1 \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1 := \dim(E_A(-1)) = 1.$$

<u>Fall 2. $\lambda_2 = \mathrm{i}$</u>: Der Eigenraum $E_A(\mathrm{i})$ lautet, da dieser ein Untervektorraum des $\mathbb{C}^3$ ist:

$$\begin{aligned}
E_A(\mathrm{i}) &= \ker(A - \mathrm{i}I_3) = \ker(5A - 5\mathrm{i}I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1+4\mathrm{i}-5\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 5\mathrm{i}-5\mathrm{i} & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4+\mathrm{i}-5\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & 0 & -2-2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2-2\mathrm{i} & 0 & -4-4\mathrm{i} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -(1+\mathrm{i}) & 0 & -2(1+\mathrm{i}) \\ 0 & 0 & 0 \\ -2(1+\mathrm{i}) & 0 & -4(1+\mathrm{i}) \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot \left(-\frac{1}{1+\mathrm{i}}\right) \\ \\ \mid \cdot \left(-\frac{1}{2(1+\mathrm{i})}\right) \end{matrix} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2 := \dim(E_A(\mathrm{i})) = 2.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda_1 = -1,$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Eigenvektoren zum Eigenwert } \lambda_2 = \mathrm{i}.$$

Bemerkung (zu $\sqrt{2\mathrm{i}} = \pm(1+\mathrm{i})$): Dies kann man natürlich einmal leicht überprüfen durch Quadrieren:

$$(\pm(1+\mathrm{i}))^2 = (1+\mathrm{i})^2 = 1 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 1 + 2\mathrm{i} - 1 = 2\mathrm{i}.$$

Man kommt darauf durch folgende Überlegung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\sqrt{2\mathrm{i}} = a + \mathrm{i}b$. Dann gilt durch Quadrieren:

$$2\mathrm{i} = (a+\mathrm{i}b)^2 \ \Leftrightarrow \ 2\mathrm{i} = a^2 + 2\mathrm{i}ab + (\mathrm{i}b)^2 \ \Leftrightarrow \ 2\mathrm{i} = a^2 + 2\mathrm{i}ab - b^2 \ \Leftrightarrow \ 0 + 2\mathrm{i} = \left(a^2 - b^2\right) + 2\mathrm{i}ab.$$

Per Vergleich von Real- und Imaginärteil bekommen wir, dass

$$a^2 - b^2 = 0 \text{ und } 2ab = 2 \ \Leftrightarrow \ a^2 = b^2 \text{ und } a \cdot b = 1$$

gelten muss.
<u>Fall 1. $a = b$</u>: Dann ist

$$a^2 = b^2.$$

Weiter folgt aus

$$1 = a \cdot b = a \cdot a = a^2,$$

dass $a \in \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ sein muss. So erhalten wir für $\zeta^2 = 2\mathrm{i}$:

$$\zeta = -1 - \mathrm{i} = -(1+\mathrm{i}) \text{ oder } \zeta = 1 + \mathrm{i} \ \Rightarrow \ \zeta^2 = 2\mathrm{i}.$$

Fall 2. $a = -b$: Dann ist

$$a^2 = b^2.$$

Wegen $a \cdot b = 1$ ist $a, b \neq 0$, daher folgt nun:

$$1 = a \cdot b = a \cdot (-a) = -a^2$$

und diese Gleichung ist nicht lösbar für $a \in \mathbb{R}$.
Mehr Fälle können nicht auftreten, d.h. es gilt:

$$\zeta^2 = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow \zeta = -1 - \mathrm{i} = -(1 + \mathrm{i}) \text{ oder } \zeta = 1 + \mathrm{i}.$$

Dies war zu zeigen für die Wurzel $\sqrt{2\mathrm{i}}$. $\square$

(c) **Schritt 4.** Normen der Eigenvektoren ausrechnen

Norm von $\vec{v}_1$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_1$:

$$\|\vec{v}_1\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|1|^2 + |0|^2 + |2|^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 0 + 4} = \sqrt{5}.$$

Norm von $\vec{v}_2$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_2$:

$$\|\vec{v}_2\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|0|^2 + |1|^2 + |0|^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{0 + 1 + 0} = \sqrt{1} = 1.$$

Norm von $\vec{v}_3$: Es gilt für die Norm des ersten Eigenvektors $\vec{v}_3$:

$$\|\vec{v}_3\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|2|^2 + |0|^2 + |-1|^2} = \sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 0 + 1} = \sqrt{5}.$$

Schritt 5. Unitäre Diagonalisierbarkeit

Die Matrix A ist unitär diagonalisierbar, da die Matrix A normal ist. Für die Matrix A setzen wir die unitäre Matrix U:

$$U := \begin{pmatrix} \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1 & \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 & \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{v}_1 & \frac{1}{1}\vec{v}_2 & \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \sqrt{5}\vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1\sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Für die Matrix A setzen wir die Diagonalmatrix D:

$$D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3},$$

da $\lambda_2 = 5$ ein doppelter EIgenwert ist. Damit gilt nun, dass die Matrix A (unitär) ähnlich zu D ist, d.h.

$$A = UDU^{-1} = UDU^*,$$

da die Matrix A unitär ist, d.h. es ist $U^* = U^{-1}$. $\square$

Aufgabe 2 ((Komplexe) Jordan-Normalform)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix A, sowie die dazugehörigen Eigenvektoren.

(b) Warum ist die Matrix A nicht diagonalisierbar? Bestimmen Sie die (komplexe) Jordan-Normalform $J \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ der Matrix A und geben Sie eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $J = S^{-1}AS$ an.

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** Charakteristisches Polynom p_A aufstellen

Charakteristisches Polynom p_A: Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0 - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0 \\ &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes, genauer mit der Entwicklung nach der zweiten Zeile bei beiden Determinanten:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)\left[-0\cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + (2-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] \\ &\quad - \left[-1\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right] \\ &= (2-\lambda)\left[-0 + (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 0\right] - \left[- \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 0 - 0\right] \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \left((2-\lambda)^2 + 1\right) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left((2-\lambda)^2 + 1\right)\left((2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 1\cdot(-1)\right) = \left((2-\lambda)^2+1\right)\left((2-\lambda)^2+1\right) = \left((2-\lambda)^2+1\right)^2 \\ &= \left(4 - 4\lambda + \lambda^2 + 1\right)^2 = \left(\lambda^2 - 4\lambda + 5\right)^2 = \left(\left((2-\mathrm{i})-\lambda\right)\left((2+\mathrm{i})-\lambda\right)\right)^2 = \left((2-\mathrm{i})-\lambda\right)^2\left((2+\mathrm{i})-\lambda\right)^2, \end{aligned}$$

da $\mathrm{i}^2 = -1$ ist und wir z.B. laut der Mitternachtsformel

$$0 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} \;\Leftrightarrow\; \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \lambda=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}\ \Leftrightarrow\ \lambda=\frac{4\pm 2\mathrm{i}}{2}\ \Leftrightarrow\ \lambda=2\pm\mathrm{i}\Leftrightarrow\ \lambda=2-\mathrm{i}\text{ oder }\lambda=2+\mathrm{i}$$

haben.
Schritt 2. Eigenwerte der Matrix A aufstellen
Eigenwerte der Matrix A: Es gilt laut Vorlesung:

$$\lambda\in\mathbb{C}\text{ Eigenwert von }A\ \Leftrightarrow\ p_A(\lambda)=0\ \Leftrightarrow\ \left((2-\mathrm{i})-\lambda\right)^2\left((2+\mathrm{i})-\lambda\right)^2=0\ \Leftrightarrow\ \lambda\in\{2-\mathrm{i},2+\mathrm{i}\}\,.$$

Damit hat die Matrix A nun zwei Eigenwerte

$$\lambda_1:=2-\mathrm{i}\text{ und }\lambda_2:=2+\mathrm{i},$$

wobei $\lambda_1=2-\mathrm{i}$ und $\lambda_2=2+\mathrm{i}$ doppelte Eigenwerte (d.h. für die algebraische Vielfachheiten gilt $k_1=k_2=2$) der Matrix A sind.
Schritt 3. Eigenvektoren $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ berechnen
Eigenvektoren zu λ_1 **und** λ_2 **der Matrix** A:
Fall 1. $\lambda_1=2-\mathrm{i}$: Der Eigenraum $E_A(2-\mathrm{i})$ lautet:

$$E_A(2-\mathrm{i})=\ker\left(A-(2-\mathrm{i})I_4\right)=\ker\begin{pmatrix}2-(2-\mathrm{i}) & 0 & -1 & 0\\ 1 & 2-(2-\mathrm{i}) & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2-(2-\mathrm{i}) & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2-(2-\mathrm{i})\end{pmatrix}$$

$$=\ker\begin{pmatrix}2-2+\mathrm{i} & 0 & -1 & 0\\ 1 & 2-2+\mathrm{i} & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2-2+\mathrm{i} & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2-2+\mathrm{i}\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}\mathrm{i} & 0 & -1 & 0\\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -1\\ 1 & 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{matrix}+\\ +\\ \cdot(-\mathrm{i})\quad\cdot(-1)\\ \\ \end{matrix}$$

$$=\ker\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & -1\\ 1 & 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +\\ \\ \cdot(-\mathrm{i})\end{matrix}\quad=\ker\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\mathrm{i} & 0\\ 1 & 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \mid\cdot\left(-\frac{1}{2\mathrm{i}}\right)\quad\cdot(-\mathrm{i})\quad\cdot(-1)\\ +\\ +\end{matrix}$$

$$=\ker\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i}\end{pmatrix}=\ker\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_1:

$$m_1:=\dim\left(E_A(2-\mathrm{i})\right)=1.$$

Fall 2. $\lambda_2=2+\mathrm{i}$: Wegen $A\in\mathbb{R}^{4\times 4}$ und

$$\lambda_2=2+\mathrm{i}=\overline{2-\mathrm{i}}=\overline{\lambda}_1$$

folgt für den Eigenraum $E_A(2+\mathrm{i})$:

$$E_A(2+\mathrm{i})=\overline{E_A(2-\mathrm{i})}=\overline{\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\}}=\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für die geometrische Vielfachheit m_2:

$$m_2:=\dim\left(E_A(2+\mathrm{i})\right)=1.$$

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten der Matrix A lauten nun:

$$\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\text{ Eigenvektor zum Eigenwert }\lambda_1=2-\mathrm{i},$$

$$\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{i}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\text{ Eigenvektoren zum Eigenwert }\lambda_2=2+\mathrm{i}.$$

(b) **Nicht-Diagonalisierbarkeit**: Die Matrix A ist nun nicht diagonalisierbar, da z.B. für den Eigenwert $\lambda_1 = 2 - \mathrm{i}$ die algebraische Vielfachheit $k_1 = 2$ nicht mit der geometrischen Vielfachheit $m_1 = 1$ übereinstimmt, genauer:

$$m_1 = 1 < 2 = k_1.$$

Schritt 4. Haupträume bestimmen
Fall 1. $\lambda_1 = 2 - \mathrm{i}$: Dazu berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
(A - (2-\mathrm{i})\, I_4)^2 &= \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} + (-1)\cdot 1 & 0 & \mathrm{i}\cdot(-1) + (-1)\cdot\mathrm{i} & 0 \\ 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} + (-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot(-1) + (-1)\cdot\mathrm{i} \\ 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 0 & 1\cdot(-1) + \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} & 0 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 1 & 1\cdot(-1) + \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1-1 & 0 & -\mathrm{i}-\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i}+\mathrm{i} & -1-1 & -1-1 & -\mathrm{i}-\mathrm{i} \\ \mathrm{i}+\mathrm{i} & 0 & -1-1 & 0 \\ 1+1 & \mathrm{i}+\mathrm{i} & \mathrm{i}+\mathrm{i} & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2\mathrm{i} & 0 \\ 2\mathrm{i} & -2 & -2 & -2\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -1 & -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Nun gilt für den ersten Hauptraum $H_A^{(1)}(2-\mathrm{i})$, da dies ein Untervektorraum des $\mathbb{C}^4$ ist:

$$
\begin{aligned}
H_A^{(1)}(2-\mathrm{i}) &= \ker (A - (2-\mathrm{i})\, I_4)^2 = \ker \left(2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -1 & -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -1 & -1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot\mathrm{i} \;\; \cdot\mathrm{i} \;\; \cdot 1 \;\mid \cdot(-1) \\ + \\ + \\ + \end{array} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot\mathrm{i} \;\mid \cdot(-1) \\ \\ + \end{array} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

Damit entspricht nun die Dimension des ersten Hauptraums von $\lambda_1 = 2 - \mathrm{i}$ der algebraischen Vielfachheit vom Eigenwert $\lambda_1 = 2 - \mathrm{i}$, genauer:

$$\dim \left(H_A^{(1)}(2-\mathrm{i}) \right) = 2 = k_1.$$

Fall 2. $\lambda_2 = 2 + \mathrm{i}$: Wegen $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und

$$\lambda_2 = 2 + \mathrm{i} = \overline{2 - \mathrm{i}} = \overline{\lambda_1}$$

folgt für den Hauptraum $H_A^{(1)}(2+\mathrm{i})$:

$$H_A^{(1)}(2+\mathrm{i}) = \overline{H_A^{(1)}(2-\mathrm{i})} = \operatorname{lin} \overline{\left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit entspricht nun die Dimension des ersten Hauptraums von $\lambda_2 = 2 + \mathrm{i}$ der algebraischen Vielfachheit vom Eigenwert $\lambda_2 = 2 + \mathrm{i}$, genauer:

$$\dim \left(H_A^{(1)}(2+\mathrm{i}) \right) = 2 = k_2.$$

Schritt 5. Aufstellen der Matrix S
Wähle

$$\vec{w}_2 \in \ker (A - \lambda_1 I_4)^2 \setminus \ker (A - \lambda_1 I_4) = H_A^{(1)}(2-\mathrm{i}) \setminus E_A(2-\mathrm{i})$$

und setze dann

$$\vec{w}_1 := (A - \lambda_1 I_4)\, \vec{w}_2 \in E_A(2-\mathrm{i}).$$

Zum Beispiel:

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_A^{(1)}(2-\mathrm{i}) \setminus E_A(2-\mathrm{i}),$$

dann ist

$$\vec{w}_1 = (A - \lambda_1 I_4)\,\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} + 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ 1\cdot\mathrm{i} + \mathrm{i}\cdot 0 + 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot\mathrm{i} + 0\cdot 0 + \mathrm{i}\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ 0\cdot\mathrm{i} + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + \mathrm{i}\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0+1+0 \\ \mathrm{i}+0+0+0 \\ \mathrm{i}+0-\mathrm{i}+0 \\ 0+0-1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{v}_1 \in E_A(2-\mathrm{i}).$$

<u>Fall 2. $\lambda_2 = 2 + \mathrm{i}$</u>: Wähle

$$\vec{w}_4 \in \ker(A - \lambda_2 I_4)^2 \setminus \ker(A - \lambda_2 I_4) = H_A^{(1)}(2+\mathrm{i}) \setminus E_A(2+\mathrm{i})$$

und setze dann

$$\vec{w}_3 := (A - \lambda_2 I_4)\,\vec{w}_4 \in E_A(2+\mathrm{i}).$$

Zum Beispiel:

$$\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_A^{(1)}(2+\mathrm{i}) \setminus E_A(2+\mathrm{i}),$$

dann ist

$$\vec{w}_3 = (A - \lambda_2 I_4)\,\vec{w}_4 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i} + 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 1\cdot\mathrm{i} + (-\mathrm{i})\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot\mathrm{i} + 0\cdot 0 + (-\mathrm{i})\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot\mathrm{i} + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-\mathrm{i})\cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0-1+0 \\ \mathrm{i}+0+0+0 \\ \mathrm{i}+0-\mathrm{i}+0 \\ 0+0+1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{v}_2 \in E_A(2+\mathrm{i}).$$

Für die Matrix A setzen wir die reguläre Matrix S:

$$S := \begin{pmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 & \vec{w}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}.$$

Schritt 6. Die Jordanmatrix J aufstellen
Da die geometrische Vielfachheit stets gleich Eins ist ($m_1 = m_2 = 1$) gibt es jeweils nur einen Jordanblock, also sehen diese wie folgt aus:

$$J_1 := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$J_2 := \begin{pmatrix} \lambda_2 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Demnach ergibt sich für die Jordanmatrix J:

$$J := \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Schritt 7. Zusammenfassen
Damit besitzt nun die Matrix A die komplexe Jordan-Normalform J, d.h. es gilt:

$$A = SJS^{-1}.$$

□

Aufgabe 3 (Definitheit von symmetrischen Matrizen)

Gegeben sei für $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & a+b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix A symmetrisch?

(b) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix symmetrisch und positiv definit?

(c) Seien nun $c = 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix A symmetrisch ist. Welche Definitheiten/ Indefinitheit sind nun möglich und in welchen Fällen treten diese auf?

Lösung von Aufgabe 3

(a) Es gilt:

$$A^T = \begin{pmatrix} a & a+b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Nun erhalten wir per Vergleich der Matrixeinträge, dass die Matrix A symmetrisch ist (d.h. $A^T = A$) genau dann, wenn $a + b = 1$ ist. In diesem Falle lautet die zu betrachtende Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} a & a+b & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

□

(b) Aus Aufgabenteil (a) wissen wir, dass

$$a + b = 1 \text{ bzw. } b = 1 - a$$

gelten muss. Für positive Definitheit der symmetrischen Matrix A muss nun nach dem Satz von Hurwitz gelten:
<u>Fall 1. $m = 1$</u>: Es gilt:

$$0 < \det(a_{11}) = \det(a) = a.$$

<u>Fall 2. $m = 2$</u>: Es gilt:

$$0 < \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot 1 - 1 \cdot 1 = a - 1,$$

bzw.

$$a > 1.$$

<u>Fall 3. $m = 3$</u>: Es gilt nach der Regel von Sarrus:

$$\begin{aligned} 0 < \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} \\ = a \cdot 1 \cdot c + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot a - c \cdot 1 \cdot 1 \\ = ac + 0 + 0 - 1 - 0 - c = -1 + (a-1)\,c \end{aligned}$$

und daraus erhalten wir

$$(a-1)\,c > 1.$$

Zusammen muss nun laut dem Satz von Hurwitz für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten:

(1) $b = 1 - a$.

(2) $a > 1 > 0$.

(3) $(a-1)\,c > 1$.

Dabei ergeben die Bedingungen (2) und (3) zusammen, dass wir die Bedingungen

(1) $b = 1 - a$.

(2) $a > 1 > 0$.

(3') $c > \frac{1}{a-1}$.

erhalten. Unter den Bedingungen (1), (2) und (3') ist die Matrix A symmetrisch und positiv definit. $\square$

(c) Sei nun $c = 0$, da die Matrix A symmetrisch sein soll, muss $a + b = 1$ sein. Es gilt für die Hauptunterdeterminanten aus Aufgabenteil (b):

- $m = 1$: $\det(a_{11}) = a$.
- $m = 2$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a - 1$.
- $m = 3$: $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det(A) = -1 + (a-1)\,c = -1 + (a-1) \cdot 0 = -1 + 0 = -1 < 0$.

Wir gehen alle Definitheiten einzeln durch:

- **Positiv definit**: Geht nicht, da $\det(A) < 0$ (Widerspruch zum Satz von Hurwitz).
- **Negativ definit**: Geht nicht, sonst müsste $0 > \det(a_{11}) = a$ sein, was aber

  $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a - 1 < 0 - 1 = -1 < 0$$

  zur Folge hat (Widerspruch zum Satz von Hurwitz).
- **Positiv semidefinit**: Geht nicht, da die Determinante $\det(A) = -1 < 0$ ist, d.h. es gibt mindestens einen Eigenwert $\lambda^* \in \mathbb{R}$, welcher negativ ist (Widerspruch zur alternativen Charakterisierung).
- **Negativ semidefinit**: Geht nicht, da die Determinante $\det(A) = -1 \neq 0$ ist und somit müsste die Matrix A schon negativ definit sein, was sie nicht sein kann.

Damit haben wir alle möglichen Definitheiten ausgeschlossen und es bleibt nur noch, dass im Fall $c = 0$ und $a + b = 1$ die Matrix A indefinit ist. $\square$