13.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Unstetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad , \; g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{falls } x^2 < y \\ \frac{y}{x^2}, & \text{falls } 0 < y \le x^2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } h(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\mathrm{e}^{x^2}-1}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ und } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion g stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{r\to 0^+} g(ra, rb) = g(0,0)$$

ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion h stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ und unstetig in $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{und } g(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}\sin(x-y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion g stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (Raumkurven, Längen & Natürliche Parametrisierung)

(a) Gegeben sei zu einem Radius $r > 0$ die Raumkurve (Astroide/ Sternkurve)

$$\gamma_1 \colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos^3(t) \\ r\sin^3(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Länge $L(\gamma_1)$ von der Kurve γ_1. Parametrisieren Sie die Kurve γ_1 bzgl. der Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Länge L der sogenannten Neilschen Parabel $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 4]$. Parametrisieren Sie auch die aufgetretene Kurve bzgl. der Bogenlänge.