13.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Unstetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{y}, & \text{falls } x^2 < y \\ \frac{y}{x^2}, & \text{falls } 0 < y \leq x^2, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{und } h(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\mathrm{e}^{x^2}-1}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie weiterhin, dass die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \text{ und } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion g stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ und unstetig in $(0,0)$. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{r\to 0^+} g(ra, rb) = g(0,0)$$

ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion h stetig ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ und unstetig in $\{0\} \times \mathbb{R}$.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Unstetigkeit in $(0,0)$
Setze dazu

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to \infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to \infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0).$$

Andererseits gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x_n, y_n) = f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} + 0^2} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + 0} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^4}} = n^4 \cdot \frac{2}{n^2} = 2n^2.$$

Die Folge $(2n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ist divergent, daher auch die Folge $(f(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, also ist die Funktion f nicht stetig in $(0,0)$.
Schritt 3. Partielle Stetigkeit in $(0,0)$
Sei erst $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fest, dann gilt für $y \to 0$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{x^2 + 0^2}{x^2 \cdot 0^2 + (x-0)^2} = \frac{x^2 + 0}{x^2 \cdot 0 + x^2} = \frac{x^2}{0 + x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Damit folgt nun:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 = f(0,0).$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fest, dann gilt für $x \to 0$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} \to \frac{0^2 + y^2}{0^2 \cdot y^2 + (0-y)^2} = \frac{0 + y^2}{0 \cdot y^2 + (-y)^2} = \frac{y^2}{0 + y^2} = \frac{y^2}{y^2} = 1.$$

Damit folgt nun:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{<\to\infty} 1 = 1 = f(0,0).$$

Dies war zu zeigen. □
Bemerkung: In Schritt 3. können wir auch über Symmetrie argumentieren, denn es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2x^2 + (-(y-x))^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^2x^2 + (y-x)^2} = f(y,x).$$

Aus dem ersten Gezeigten von Schritt 3. folgt nun:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(y,x)\right) = \lim_{y\to 0} 1 = 1 = f(0,0).$$

□

(b) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
Setze die vier Mengen

$$\begin{aligned}
O &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > x^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \\
U &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x^2\right\} \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \\
P &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = x^2\right\} \setminus \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}, \\
R &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y < 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.
\end{aligned}$$

Dann sind die Funktionen $g|_O$, $g|_U$ bzw. $g|_R$ als Komposition stetiger Funktionen stetig auf O, U bzw. R, da die Mengen O, U bzw. R offen in $\mathbb{R}^2$ sind (siehe Bemerkung am Ende vom Aufgabenteil). Sei nun $(x_0, y_0) \in P$, d.h. $y_0 = x_0^2$, so ist

$$f(x_0, y_0) = \frac{y_0}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{x_0^2} = 1$$

und weiter seien

$$\left(\left(x_n^{(O)}, y_n^{(O)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq O,\ \left(\left(x_n^{(U)}, y_n^{(U)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U \text{ und } \left(\left(x_n^{(P)}, y_n^{(P)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq P$$

drei konvergente Folgen mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{(O)}, y_n^{(O)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n^{(U)}, y_n^{(U)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n^{(P)}, y_n^{(P)}\right) = (x_0, y_0)$$

und $y_n^{(P)} = \left(x_n^{(P)}\right)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für die Folge der Funktionswerte für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
g\left(x_n^{(O)}, y_n^{(O)}\right) &= \frac{\left(x_n^{(O)}\right)^2}{y_n^{(O)}} \to \frac{x_0^2}{y_0} = \frac{x_0^2}{x_0^2} = 1 = g(x_0, y_0), \\
g\left(x_n^{(U)}, y_n^{(U)}\right) &= \frac{y_n^{(U)}}{\left(x_n^{(U)}\right)^2} \to \frac{y_0}{x_0^2} = \frac{x_0^2}{x_0^2} = 1 = g(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

$$g\left(x_n^{(P)}, y_n^{(P)}\right) = \frac{y_n^{(P)}}{\left(x_n^{(P)}\right)^2} = \frac{\left(x_n^{(P)}\right)^2}{\left(x_n^{(P)}\right)^2} = 1 \to 1 = g\left(x_0, y_0\right).$$

Daraus folgt nun, dass die Funktion g in allen Punkten auf P stetig ist. Sei nun $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0,0)\}$, so ist:

$$f\left(x_0, y_0\right) = 0$$

und weiter sei

$$\left(\left(x_n^{(U)}, y_n^{(U)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U \text{ und } \left(\left(x_n^{(R)}, y_n^{(R)}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R$$

zwei konvergente Folgen mit dem Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n^{(U)}, y_n^{(U)}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(x_n^{(R)}, y_n^{(R)}\right) = \left(x_0, y_0\right).$$

Dann gilt für die Folge der Funktionswerte für $n \to \infty$:

$$\begin{aligned} g\left(x_n^{(U)}, y_n^{(U)}\right) &= \frac{y_n^{(U)}}{\left(x_n^{(U)}\right)^2} \to \frac{y_0}{x_0^2} = \frac{0}{x_0^2} = 0 = g\left(x_0, y_0\right), \\ g\left(x_n^{(R)}, y_n^{(R)}\right) &= 0 \to 0 = g\left(x_0, y_0\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun, dass die Funktion g in allen Punkten auf $(\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0,0)\}$ stetig ist. Zusammengefasst haben wir nun die Stetigkeit der Funktion g auf

$$P \cup U \cup O \cup R \cup [(\mathbb{R} \times \{0\}) \setminus \{(0,0)\}] = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

gezeigt.

Schritt 2. Unstetigkeit in $(0,0)$

Setze dazu

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n, y_n\right) = (0,0).$$

Es gilt:

$$y_n = \frac{1}{n^2} = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = x_n^2 \le x_n^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiter haben wir nun für $n \to \infty$:

$$g\left(x_n, y_n\right) = g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \to 1 \neq 0 = g\left(0,0\right).$$

Damit ist die Funktion g unstetig im Punkt $(0,0)$.

Schritt 3. Stetigkeit längs Geraden in $(0,0)$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Fall 1. $b \le 0$</u>: Es gilt für alle $r > 0$, dass $rb \le 0$, d.h für alle $r > 0$ ist:

$$g\left(ra, rb\right) = 0.$$

Daher folgt:

$$\lim_{r\to 0^+} g\left(ra, rb\right) = \lim_{r\to 0^+} 0 = 0 = g\left(0,0\right).$$

<u>Fall 2. $a = 0,\ b > 0$</u>: Dann gilt für alle $r > 0$:

$$(ra)^2 = (r \cdot 0)^2 = 0^2 = 0 < rb.$$

Daher folgt nun für alle $r > 0$:

$$g\left(ra, rb\right) = g\left(r \cdot 0, rb\right) = g\left(0, rb\right) = \frac{0}{rb} = 0.$$

Daher folgt:

$$\lim_{r\to 0^+} g(ra, rb) = \lim_{r\to 0^+} 0 = 0 = g(0,0).$$

Fall 3. $a \neq 0,\ b > 0$: Wähle nun $0 < r < \frac{b}{a^2}$, dann gilt, da $a^2 > 0$ ist:

$$(ra)^2 = r^2 a^2 = r \cdot r \cdot a^2 < r \cdot \frac{b}{a^2} \cdot a^2 = rb.$$

Daher folgt nun für alle $r \in \left(0, \frac{b}{a^2}\right)$:

$$g(ra, rb) = \frac{\left(r^2 a\right)^2}{rb} = \frac{r^2 a^2}{rb} = \frac{ra^2}{b} = r\frac{a^2}{b}.$$

Daher folgt:

$$\lim_{r\to 0^+} g(ra, rb) = \lim_{r\to 0^+} r\frac{a^2}{b} = 0 \cdot \frac{a^2}{b} = 0 = g(0,0).$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Bemerkung: Die Offenheit der Menge O zeigt sich über die Abgeschlossenheit des Komplements:

$$O^C = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Seien nun $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ und $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq O^C$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$.
Zu zeigen: $(x_0, y_0) \in O^C$.
Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$y_n \leq x_n^2,$$

da $(x_n, y_n) \in O^C$ ist. Nun erhalten wegen der Konvergenz:

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^2 = (x_0)^2 = x_0^2,$$

d.h. $(x_0, y_0) \in O^C$. Damit ist die Menge O^C abgeschlossen und somit muss die Menge O offen sein in $\mathbb{R}^2$. $\square$

Die beiden anderen Mengen, U und R, folgen ganz analog vice versa.
(c) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$
Die Funktion $h|_{\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\}\times\mathbb{R})}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$.
Schritt 2. Unstetigkeit in $\{0\} \times \mathbb{R}$
Sei $(x_0, y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ fest, dann ist per Definition $x_0 = 0$, d.h. $(x_0, y_0) = (0, y_0)$.
Weiter folgt wegen der Reihendarstellung der Exponentialfunktion exp:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2} - 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(x^2\right)^k - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} - 1 = \frac{1}{0!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k} - 1 = \frac{1}{1} + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k-2} - 1 = 1 + x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2(k-1)} - 1 \\ &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{2k} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt für alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, y \in \mathbb{R}$:

$$h(x,y) = \frac{xy}{\mathrm{e}^{x^2} - 1} = \frac{xy}{x^2 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{2k}} = \frac{y}{x \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} x^{2k}}.$$

Fall 1. $y_0 = 0$: Setze dazu

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (0,0) = (x_0, y_0).$$

Andererseits gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$h(x_n, y_n) = h\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{2k}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{1}{\frac{1}{(0+1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{1}{\frac{1}{1!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}}.$$

Es folgt nun:

$$\lim_{n\to\infty} h\left(x_n, y_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} 0} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0 = h\left(0,0\right).$$

Also ist die Funktion h nicht stetig in $(0,0)$.
Fall 2. $y_0 \neq 0$: Setze dazu

$$\left(x_n, y_n\right) = \left(\frac{1}{n}, y_0\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_0 = y_0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n\to\infty} \left(x_n, y_n\right) = \left(0, y_0\right) = \left(x_0, y_0\right).$$

Andererseits gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$h\left(x_n, y_n\right) = h\left(\frac{1}{n}, y_0\right) = \frac{y_0}{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{1}{n}\right)^{2k}} = \frac{ny_0}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{ny_0}{\frac{1}{(0+1)!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{ny_0}{\frac{1}{1!} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}}$$
$$= \frac{ny_0}{\frac{1}{1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} = \frac{ny_0}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}}.$$

Es folgt nun für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|h\left(x_n, y_n\right)\right| &= \left|\frac{ny_0}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}}\right| = |n| \frac{|y_0|}{\left|1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}\right|} = n \frac{|y_0|}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{n^{2k}}} \\ &\geq n \frac{|y_0|}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \cdot 1} = n \frac{|y_0|}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \cdot 1^{k+1}} = n \frac{|y_0|}{1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 1^k} \\ &\geq n \frac{|y_0|}{1 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot 1^k} = n \frac{|y_0|}{1 + \mathrm{e}^1} = n \frac{|y_0|}{1 + \mathrm{e}}.\end{aligned}$$

Die Folge $\left(h\left(x, y_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ist damit unbeschränkt, da die Folge $\left(n \frac{|y_0|}{1+\mathrm{e}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt ist, weil $y_0 \neq 0$ ist. Damit divergiert die Folge $\left(h\left(x_n, y_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, und dies heißt, dass die Funktion h nicht stetig ist in (x_0, y_0).
Zusammengefasst: Also haben wir nun gesehen, dass die Funktion h unstetig auf der y-Achse $\{0\} \times \mathbb{R}$ ist. $\square$

Aufgabe 2 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{und } g(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin(x-y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{für } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion g stetig ist auf $\mathbb{R}^2$.

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Stetigkeit in $(0,0)$
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nach dritter binomischer Formel:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2) \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\sqrt{x^2+y^2+1}^2 - 1} \\ &= \frac{(x^2+y^2) \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} = \frac{(x^2+y^2) \cdot \left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2+1}+1. \end{aligned}$$

Also folgt für $(x,y) \to (0,0)$:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \to \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = \sqrt{0+0+1}+1 = \sqrt{1}+1 = 1+1 = 2 = f(0,0).$$

Also ist die Funktion f stetig im Punkt $(0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2$
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist. $\square$
(b) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $g|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Stetigkeit in $(0,0)$
Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ nach der zweiten binomischen Formel:

$$0 \le (x-y)^2 \;\Leftrightarrow\; 0 \le x^2 - 2xy + y^2 \;\Leftrightarrow\; 2xy \le x^2 + y^2.$$

Es gilt damit für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$g(x,y) = \left| \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin(x-y) \right| = \frac{2|x||y|}{x^2+y^2} |\sin(x-y)| \le \frac{|x|^2+|y|^2}{x^2+y^2} |\sin(x-y)| = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} |\sin(x-y)| = |\sin(x-y)|.$$

Also folgt für $(x,y) \to (0,0)$:

$$g(x,y) = |\sin(x-y)| \to |\sin(0-0)| = |\sin(0)| = |0| = 0 = g(0,0),$$

da die Betragsfunktion $|\cdot|$ und die Sinusfunktion sin stetig sind. Also ist die Funktion g stetig im Punkt $(0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2$
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion g stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist. $\square$

Aufgabe 3 (Raumkurven, Längen & Natürliche Parametrisierung)

(a) Gegeben sei zu einem Radius $r > 0$ die Raumkurve (Astroide/ Sternkurve)

$$\gamma_1 \colon \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos^3(t) \\ r\sin^3(t) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Länge $L(\gamma_1)$ von der Kurve γ_1. Parametrisieren Sie die Kurve γ_1 bzgl. der Bogenlänge.

(b) Berechnen Sie die Länge L der sogenannten Neilschen Parabel $y = x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0,4]$. Parametrisieren Sie auch die aufgetretene Kurve bzgl. der Bogenlänge.

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1.** Ableitung von γ_1
Es gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\left(r\cos^3\right)'(t) &= 3r\cos^2(t)\cdot\cos'(t) = 3r\cos^2(t)\cdot(-\sin(t)) = -3f\sin(t)\cos^2(t),\\ \left(r\sin^3\right)'(t) &= 3r\sin^2(t)\cdot\sin'(t) = 3r\sin^2(t)\cdot\cos(t) = 3r\sin^2(t)\cos(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Demnach folgt für die Ableitung von γ_1:

$$\dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} -3r\sin(t)\cos^2(t) \\ 3r\sin^2(t)\cos(t) \end{pmatrix} = 3r\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Schritt 2. Norm von $\dot\gamma_1$
Für $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist

$$\sin(t) \geq 0 \text{ und } \cos(t) \geq 0.$$

Also folgt mit der Homogenität der Norm für alle $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}\|\dot\gamma_1\| &= \left\|3\sin(t)\cos(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\right\| = |3r\sin(t)\cos(t)|\left\|\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}\right\| = 3r\sin(t)\cos(t)\sqrt{|-\cos(t)|^2 + |\sin(t)|^2}\\ &= 3r\sin(t)\cos(t)\sqrt{\cos^2(t) + sin^2(t)} = 3r\sin(t)\cos(t)\sqrt{1} = 3r\sin(t)\cos(t)\cdot 1 = 3r\sin(t)\cos(t),\end{aligned}$$

wegen dem trigonometrischen Pythagoras

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Schritt 3. Parametrisierung ψ
Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi(t) &:= \int_0^t \|\dot\gamma_1(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_0^t 3r\sin(s)\cos(s)\mathrm{d}s = 3r\int_0^t \sin(s)\cos(s)\mathrm{d}s = 3r\left[\frac{1}{2}sin^2(s)\right]_0^t = 3r\left(\frac{1}{2}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\sin^2(0)\right)\\ &= 3r\left(\frac{1}{2}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\cdot 0^2\right) = 3r\left(\frac{1}{2}\sin^2(t) - \frac{1}{2}\cdot 0\right) = 3r\left(\frac{1}{2}\sin^2(t) - 0\right) = \frac{3}{2}r\sin^2(t)\end{aligned}$$

für alle $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Schritt 4. Länge $L(\gamma_1)$
Es gilt für die Länge $L(\gamma_1)$:

$$L(\gamma_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot\gamma_1(s)\|\,\mathrm{d}s = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}r\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}r\cdot 1^2 = \frac{3}{2}r\cdot 1 = \frac{3}{2}r.$$

Schritt 5. Nacht t auflösen $l = \psi(t)$
Es gilt für alle $l \in \left[0, \frac{3}{2}r\right]$ und $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, da

$$\sin(t) \geq 0 \text{ für alle } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ist:

$$l=\psi(t)\ \Leftrightarrow\ l=\frac{3}{2}r\sin^2(t)\ \Leftrightarrow\ \frac{2}{3r}l=\sin^2(t)\ \Leftrightarrow\ \sqrt{\sin^2(t)}=\sqrt{\frac{2}{3r}l}\ \Leftrightarrow\ |\sin(t)|=\sqrt{\frac{2}{3r}l}$$
$$\Leftrightarrow\ \sin(t)=\sqrt{\frac{2}{3r}l}\ \Leftrightarrow\ t=\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right),$$

d.h. die Umkehrfunktion zu ψ lautet:

$$\psi^{-1}\colon\ \left[0,\frac{3}{2}r\right]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right], l\mapsto\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right).$$

Schritt 6. Natürliche Parametrisierung $\widetilde{\gamma}_1$
Es gilt für alle $l\in\left[0,\frac{3}{2}r\right]$:

$$\widetilde{\gamma}_1(l):=(\gamma_1\circ\psi)(l)=\gamma_1\left(\psi^{-1}(l)\right)=\gamma_1\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right)\right)=\begin{pmatrix} r\cos^3\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right)\right)\\ r\sin^3\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right)\right)\end{pmatrix}$$
$$=r\begin{pmatrix}\cos^3\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right)\right)\\ \sqrt{\frac{2}{3r}l}^{\,3}\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}\cos^3\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3r}l}\right)\right)\\ \frac{2l}{3r}\sqrt{\frac{2}{3r}l}\end{pmatrix}.$$

Dies war zu zeigen. □

(b) **Schritt 0.** Raumkurve γ_2 aufstellen
Aus $y=x^{\frac{3}{2}}$ für $x\in[0,4]$ lesen wir die Raumkurve γ_2 ab und setzen daher:

$$\gamma_2\colon\ [0,4],\ x\mapsto\begin{pmatrix}x\\ x^{\frac{3}{2}}\end{pmatrix}.$$

Schritt 1. Ableitung von γ_2
Es gilt:

$$(x)'(x)=1,$$
$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

für alle $x\in[0,\infty)$. Demnach folgt für die Ableitung von γ_2:

$$\dot{\gamma}_2(x)=\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\sqrt{x}\end{pmatrix}$$

für alle $x\in[0,4]$.
Schritt 2. Norm von $\dot{\gamma}_2$
Es gilt für alle $x\in[0,4]$:

$$\|\dot{\gamma}_4\|=\left\|\begin{pmatrix}1\\ \frac{3}{2}\sqrt{x}\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{|1|^2+\left|\frac{3}{2}\sqrt{x}\right|^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}.$$

Schritt 3. Parametrisierung ψ
Es gilt:

$$\psi(x):=\int\limits_0^x\|\dot{\gamma}_2(s)\|\,\mathrm{d}s=\int\limits_0^x\sqrt{1+\frac{9}{4}s}\mathrm{d}s=\left[\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}s\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x=\left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}s\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}s\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^x$$
$$=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}-(1+0)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}-1^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

für alle $x\in[0,4]$.
Schritt 4. Länge $L(\gamma_2)$
Es gilt für die Länge $L(\gamma_2)$:

$$L(\gamma_2)=\int\limits_0^4\|\dot{\gamma}_2(s)\|\,\mathrm{d}s=\psi(4)=\frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}\cdot 4\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{8}{27}\left((1+9)^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Damit lautet die gesuchte Länge L:

$$L = L\left(\gamma_2\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Schritt 5. Nacht t auflösen $l = \psi(x)$
Es gilt für alle $l \in \left[0, \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\right]$ und $x \in [0,4]$:

$$l = \psi(x) \;\Leftrightarrow\; l = \frac{8}{27}\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}-1\right) \;\Leftrightarrow\; \frac{27}{8}l = \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}-1 \;\Leftrightarrow\; \frac{27}{8}l+1 = \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\Leftrightarrow\; \left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}} = 1+\frac{9}{4}x \Leftrightarrow \left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1 = \frac{9}{4}x \;\Leftrightarrow\; x = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right],$$

d.h. die Umkehrfunktion zu ψ lautet:

$$\psi^{-1}\colon \left[0, \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\right] \to [0,4]\,, l \mapsto \frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right].$$

Schritt 6. Natürliche Parametrisierung $\widetilde{\gamma}_2$
Es gilt für alle $l \in \left[0, \frac{3}{2}r\right]$:

$$\widetilde{\gamma}_2(l) := \left(\gamma_2 \circ \psi\right)(l) = \gamma_2\left(\psi^{-1}(l)\right) = \gamma_2\left(\frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right] \\ \left(\frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]\right)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right] \\ \frac{2^3}{3^3}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right] \\ \frac{8}{27}\left[\left(\frac{27}{8}l+1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right]^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Dies war zu zeigen. $\square$