20.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Differenzierbarkeit)

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right), & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, & \text{für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} .$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen, f und g, auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ stetig sind.

(b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktionen f und g auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(c) Wo sind die Funktionen f, g differenzierbar? Geben Sie in diesem Fall die Ableitung f', g' an.

Aufgabe 2 (Richtungsableitung)

(a) Gegeben sei die Funktion f durch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a1) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion f auf $\mathbb{R}^2$.

(a2) Zeigen Sie, dass die Funktion $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)\setminus C^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ ist.

(b) Gegeben sei die Funktion f und die Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ durch:

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2+3xy-5y^2 \text{ und } \vec{v} := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3 (Lokaler Umkehrsatz)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-y}\\ \mathrm{e}^{x+y}\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass um den Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in V_1$ und eine offene Umgebung $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(2,1) \in V_2$ existieren so, dass die Abbildung $f|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ bijektiv ist.

(b) Berechnen Sie für die Umkehrfunktion $\left(f|_{V_1}\right)^{-1}\colon V_2 \to V_1$ die Ableitung im Punkt $(2,1)$.