20.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Differenzierbarkeit)

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} x^2y^2 \ln\left(x^2+y^2\right), \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}, \text{ für } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, \text{ für } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \quad .$$

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Funktionen, f und g, auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ stetig sind.

(b) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktionen f und g auf $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

(c) Wo sind die Funktionen f, g differenzierbar? Geben Sie in diesem Fall die Ableitung f', g' an.

Lösung von Aufgabe 1

Für die Funktion f:

(a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Stetigkeit in $(0,0)$
Es gilt nach zweiter binomischer Formel für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq (x-y)^2 \ \Leftrightarrow\ 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \ \Leftrightarrow\ 2xy \leq x^2 + y^2 \ \Leftrightarrow\ xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Insbesondere erhalten wir so für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|xy| = |x| \cdot |y| \leq \frac{1}{2}\left(|x|^2 + |y|^2\right) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$$

Damit erhalten wir nun für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$0 \leq |f(x,y) - f(0,0)| = \left|x^2y^2 \ln\left(x^2+y^2\right) - 0\right| = \left|(xy)^2 \ln\left(x^2+y^2\right)\right| = \left|(xy)^2\right| \left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| = |xy|^2 \left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right|$$
$$= |xy| \cdot |xy| \left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| \leq \frac{1}{2}|xy|\left(x^2+y^2\right)\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| = \frac{1}{2}|xy|\left|\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right|.$$

Weiter gilt mit Hilfe der Regeln von de l'Hospital - Fall "$\frac{\infty}{\infty}$":

$$\lim_{z\to 0^+} z\ln(z) = \lim_{z\to 0^+} \frac{\ln(z)}{\frac{1}{z}} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\frac{1}{z}}{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 0^+} \left(\frac{1}{z} \cdot \left(-z^2\right)\right) = \lim_{z\to 0^+} (-z) = -0 = 0,$$

d.h. die Funktion

$$\psi\colon\ [0,\infty)\to\mathbb{R},\ z\mapsto\begin{cases} z\ln(z)\,, & \text{für } z\neq 0\\ 0, & \text{für } z=0\end{cases}$$

ist stetig in $z_0=0\in[0,\infty)$. Es gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)=0^2+0^2=0+0=0,$$

d.h. die Funktion

$$\varphi\colon\mathbb{R}^2\to[0,\infty)\,,\ (x,y)\mapsto x^2+y^2$$

ist insbesondere stetig in $(0,0)\in\mathbb{R}^2$. Damit folgt nun wegen Verkettung von stetigen Funktionen:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\psi\left(x^2+y^2\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\psi\left(\varphi\left(x,y\right)\right)=0.$$

Also haben wir nun für $(x,y)\to(0,0)$:

$$0\le|f(x,y)-f(0,0)|\le\frac{1}{2}\left|xy\right|\left|\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\to\frac{1}{2}\left|0\cdot 0\right|\cdot|0|=\frac{1}{2}\left|0\right|\cdot 0=0,$$

da die Betragsfunktion $|\cdot|$ stetig ist auf $\mathbb{R}$. Damit ist gezeigt, dass die Funktion f stetig ist in $(0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^2$
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}^2$ ist. $\square$
(b) **Schritt 1.** Partielle Ableitung auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ laut Produktregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)\right](x,y)=2xy^2\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2x)=2x\left[y^2\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right].$$

Partielle Ableitung nach y:
Es gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ laut Produktregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y^2\ln\left(x^2+y^2\right)\right](x,y)=2x^2y\ln\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot(2y)=2y\left[x^2\ln\left(x^2+y^2\right)+\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right]\\&=\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)\,.\end{aligned}$$

Schritt 2. Partielle Ableitung in $(0,0)$
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $h\neq 0$:

$$\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\frac{f\left(h,0\right)-0}{h}=\frac{h^2\cdot 0^2\cdot\ln\left(h^2+0^2\right)}{h}=\frac{h^2\cdot 0\cdot\ln\left(h^2+0\right)}{h}=\frac{0}{h}=0.$$

Also folgt nun für $h\to 0$:

$$\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=0\to 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach x ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0+h,0\right)-f\left(0,0\right)}{h}=0.$$

Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $h\neq 0$:

$$\frac{f\left(0,0+h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=\frac{f\left(0,h\right)-0}{h}=\frac{0^2\cdot h^2\ln\left(0^2+h^2\right)}{h}=\frac{0\cdot h^2\ln\left(0+h^2\right)}{h}=\frac{0}{h}=0.$$

Also folgt nun für $h\to 0$:

$$\frac{f\left(0,h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=0\to 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach y ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0,h\right)-f\left(0,0\right)}{h}=0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.$$

Schritt 3. Partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
Da nun beide partiellen Ableitungen in allen Punkten vom $\mathbb{R}^2$ existieren, ist die Funktion f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} 2x\left[y^2 \ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right], \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} 2y\left[x^2 \ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right], \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Des weiteren gilt die Symmetriebeziehung:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\square$

(c) **Schritt 1.** Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Die beiden partiellen Ableitungen, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$, sind als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig.
Nach dem hinreichenden Kriterium für Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit der Ableitung:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\left[y^2 \ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right] & 2y\left[x^2 \ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Schritt 2. Differenzierbarkeit in $(0,0)$
<u>Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$</u>
Wegen der Dreiecksungleichung vom Betrag erhalten wir für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|2x\left[y^2\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right] - 0\right| = \left|2x\left[y^2\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right]\right| \\ &= |2|\,|x|\left|y^2\ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x|\left[\left|y^2\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \left|\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}\right|\right] = 2|x|\left[\left|y^2\right|\cdot\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \frac{|(xy)\cdot(xy)|}{|x^2+y^2|}\right] \\ &= 2|x|\left[y^2\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + |xy|\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right] \leq 2|x|\left[\left(x^2+y^2\right)\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \frac{1}{2}|xy|\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right] \\ &= 2|x|\left[\left(x^2+y^2\right)\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \frac{1}{2}|xy|\right] \end{aligned}$$

wegen

$$|xy| \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

für alle $x,y \in \mathbb{R}$. Da die Funktion ψ in $z_0 = 0$ mit $\psi(0) = 0$ und die Funktion φ stetig in $(0,0)$ ist mit $\varphi(0,0) = 0$ folgt nach Verkettung von stetigen Funktionen für $(x,y) \to (0,0)$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq 2|x|\left[\left(x^2+y^2\right)\left|\ln\left(x^2+y^2\right)\right| + \frac{1}{2}|xy|\right] = 2|x|\left[\psi(\varphi(x,y)) + \frac{1}{2}|xy|\right] \\ &\to 2|0|\left(0 + \frac{1}{2}|0\cdot 0|\right) = 2\cdot 0\cdot\frac{1}{2}|0| = 0, \end{aligned}$$

d.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ ist stetig in $(0,0)$.
<u>Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$</u>
Setze die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y,x).$$

Dann ist die Funktion h stetig auf $\mathbb{R}^2$, insbesondere in $(0,0)$ mit $h(0,0) = (0,0)$. Wegen der Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$ folgt nun für $(x,y) \to (0,0)$ als Verkettung von stetigen Funktionen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{\partial f}{\partial x}(h(x,y)) \to \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

d.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist stetig in $(0,0)$.
Zusammengefasst haben wir nun, dass die partiellen Ableitungen, $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$, stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind.
Nach dem hinreichenden Kriterium für Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2$ mit der Ableitung:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x\left[y^2 \ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right] & 2y\left[x^2 \ln\left(x^2+y^2\right) + \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

□

Für die Funktion g:

(a) **Schritt 1.** Stetigkeit auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
Die Funktion $g|_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}}$ ist als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ wieder stetig auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Schritt 2. Stetigkeit in $(0,0,0)$
Wir haben für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$:

$$0 \leq |g(x,y,z) - g(0,0,0)| = \left|\frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4} - 0\right| = \left|\frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}\right| = \frac{\left|x^2y^2z\right|}{\left|x^4+y^4+z^4\right|} = \frac{\left|x^2\right|\left|y^2\right||z|}{x^4+y^4+z^4} = \frac{|x|^2|y|^2|z|}{|x|^4+|y|^4+|z|^4}$$
$$\leq \frac{\max\{|x|,|y|,|z|\}^2 \max\{|x|,|y|,|z|\}^2 \max\{|x|,|y|,|z|\}}{\max\{|x|,|y|,|z|\}^4} = \frac{\max\{|x|,|y|,|z|\}^5}{\max\{|x|,|y|,|z|\}^4} = \max\{|x|,|y|,|z|\} \leq |x|+|y|+|z|.$$

Also haben wir nun für $(x,y,z) \to (0,0,0)$:

$$0 \leq |g(x,y,z) - g(0,0,0)| \leq |x|+|y|+|z| \to |0|+|0|+|0| = 0+0+0$$

da die Betragsfunktion $|\cdot|$ stetig ist auf $\mathbb{R}$. Damit ist gezeigt, dass die Funktion f stetig ist in $(0,0,0)$.
Schritt 3. Stetigkeit auf $\mathbb{R}^3$
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion g stetig auf $\mathbb{R}^3$ ist. □
(b) **Schritt 1.** Partielle Ableitung auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$
Die Funktion $g|_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}}$ ist als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ laut Quotientenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}\right](x,y,z) = \frac{2xy^2z \cdot \left(x^4+y^4+z^4\right) - x^2y^2z \cdot \left(4x^3\right)}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2} = \frac{2x^5y^2z + 2xy^6z + 2xy^2z^5 - 4x^5y^2z}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}$$
$$= \frac{2xy^6z + 2xy^2z^5 - 2x^5y^2z}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2} = 2\frac{xy^6z + xy^2z^5 - x^5y^2z}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}.$$

Partielle Ableitung nach y:
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ laut Quotientenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}\right](x,y,z) = \frac{2x^2yz \cdot \left(x^4+y^4+z^4\right) - x^2y^2z \cdot \left(4y^3\right)}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2} = \frac{2x^6yz + 2x^2y^5z + 2x^2yz^5 - 4x^2y^5z}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}$$
$$= \frac{2x^2y^5z + 2x^2yz^5 - 2x^2y^5z}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2} = 2\frac{x^2y^5z + x^2yz^5 - x^2y^5z}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x,z).$$

Partielle Ableitung nach z:
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ laut Quotientenregel:

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x^2y^2z}{x^4+y^4+z^4}\right](x,y,z) = \frac{x^2y^2 \cdot \left(x^4+y^4+z^4\right) - x^2y^2z \cdot \left(4z^3\right)}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2} = \frac{x^6y^2 + x^2y^6 + x^2y^2z^4 - 4x^2y^2z^4}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}$$
$$= \frac{x^6y^2 + x^2y^6 - 3x^2y^2z^4}{\left(x^4+y^4+z^4\right)^2}.$$

Schritt 2. Partielle Ableitung in $(0,0,0)$
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $h \neq 0$:

$$\frac{g(0+h,0,0) - g(0,0,0)}{h} = \frac{f(h,0,0) - 0}{h} = \frac{\frac{h^2 \cdot 0^2 \cdot 0}{h^4+0^4+0^4}}{h} = \frac{\frac{0}{h^4+0+0}}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{g(0+h,0,0)-g(0,0,0)}{h}=0\to 0,$$

d.h. g ist in $(0,0,0)$ partiell nach x ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0+h,0,0)-g(0,0,0)}{h}=0.$$

<u>Partielle Ableitung nach y:</u>
<u>Es gilt für alle $h\neq 0$:</u>

$$\frac{g(0,0+h,0)-g(0,0,0)}{h}=\frac{f(0,h,0)-0}{h}=\frac{\frac{0^2\cdot h^2\cdot 0}{0^4+h^4+0^4}}{h}=\frac{\frac{0}{0+h^4+0}}{h}=\frac{0}{h}=0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{g(0,0+h,0)-g(0,0,0)}{h}=0\to 0,$$

d.h. g ist in $(0,0,0)$ partiell nach y ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,0+h,0)-g(0,0,0)}{h}=0.$$

<u>Partielle Ableitung nach z:</u>
<u>Es gilt für alle $h\neq 0$:</u>

$$\frac{g(0,0,h)-g(0,0,0)}{h}=\frac{f(0,0,h)-0}{h}=\frac{\frac{0^2\cdot 0^2\cdot h}{0^4+0^4+h^4}}{h}=\frac{\frac{0\cdot 0\cdot h}{0+0+h^4}}{h}=\frac{\frac{0}{h^4}}{h}=\frac{0}{h}=0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{g(0,0,0+h)-g(0,0,0)}{h}=0\to 0,$$

d.h. g ist in $(0,0,0)$ partiell nach z ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g(0,0,0+z)-g(0,0,0)}{h}=0.$$

Schritt 3. Partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$
Da nun beide partiellen Ableitungen in allen Punkten vom $\mathbb{R}^3$ existieren, ist die Funktion g partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial g}{\partial x}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto\begin{cases}2\frac{xy^6z+xy^2z^5-x^5y^2z}{(x^4+y^4+z^4)^2}, \text{ falls } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, \text{ falls } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases},$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto\begin{cases}2\frac{x^2y^5z+x^2yz^5-x^2y^5z}{(x^4+y^4+z^4)^2}, \text{ falls } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, \text{ falls } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$
$$\frac{\partial g}{\partial z}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto\begin{cases}\frac{x^6y^2+x^2y^6-3x^2y^2z^4}{(x^4+y^4+z^4)^2}, \text{ falls } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0, \text{ falls } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}.$$

□

(c) **Schritt 1.** Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$
Die drei partiellen Ableitungen, $\frac{\partial g}{\partial x}|_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}}$, $\frac{\partial g}{\partial y}|_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}}$ und $\frac{\partial g}{\partial z}|_{\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}}$, sind als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ stetig.
Nach dem hinreichenden Kriterium für Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Funktion g stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ mit der Ableitung:

$$g'(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\frac{xy^6z+xy^2z^5-x^5y^2z}{(x^4+y^4+z^4)^2} & 2\frac{x^2y^5z+x^2yz^5-x^2y^5z}{(x^4+y^4+z^4)^2} & \frac{x^6y^2+x^2y^6-3x^2y^2z^4}{(x^4+y^4+z^4)^2}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times 3}$$

für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$.
Schritt 2. Nicht-Differenzierbarkeit in $(0,0,0)$
<u>Annahme</u>: Die Funktion g wäre differenzierbar in $(0,0,0)$ mit Ableitung $A\in\mathbb{R}^{1\times 3}$, dann muss laut dem Notwendigkeitskriterium für Differenzierbarkeit für A gelten:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) & \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Nach der Definition von Differenzierbarkeit müsste nun gelten:

$$0 = \lim_{\vec{h}\to(0,0,0)} \frac{\left\| g\left((0,0,0)+\vec{h}\right) - g(0,0,0) - A\vec{h}\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} = \lim_{\vec{h}\to(0,0,0)} \frac{\left\| g\left(\vec{h}\right) - 0 - \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}\vec{h}\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|} = \lim_{\vec{h}\to(0,0,0)} \frac{\left\| g\left(\vec{h}\right) - 0\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to(0,0,0)} \frac{\left\| g\left(\vec{h}\right)\right\|}{\left\|\vec{h}\right\|}.$$

Setze nun

$$\vec{h}_n := \begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\|\vec{h}_n\right\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}\\ \frac{1}{n}\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left|\frac{1}{n}\right|^2 + \left|\frac{1}{n}\right|^2 + \left|\frac{1}{n}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{3}{n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{n}.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\vec{h}_n\right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{n} = 0$$

folgt, dass $\vec{h}_n \to (0,0)$ für $n \to \infty$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\left\| g\left(\vec{h}_n\right)\right\|}{\left\|\vec{h}_n\right\|} = \frac{\left\| g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\|}{\frac{\sqrt{3}}{n}} = \frac{n}{\sqrt{3}} \cdot \left\| \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} \right\| = \frac{n}{\sqrt{3}} \cdot \left| \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} \right| = \frac{n}{\sqrt{3}} \cdot \left| \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{3}{n^4}} \right| = \frac{n}{\sqrt{3}} \cdot \left| \frac{3}{n} \right|$$

$$= \frac{n}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{n} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir nun:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\| g\left((0,0,0)+\vec{h}_n\right) - g(0,0,0) - A\vec{h}_n\right\|}{\left\|\vec{h}_n\right\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3} = \sqrt{3} \neq 0,$$

obwohl $\lim_{n\to\infty} \vec{h}_n = (0,0,0) = \vec{0}$ ist, d.h. die Funktion g ist in $(0,0,0)$ nicht differenzierbar.
Zusammengefasst haben wir nun, dass die Funktion g stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ ist mit der Ableitung

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{xy^6z + xy^2z^5 - x^5y^2z}{(x^4+y^4+z^4)^2} & 2\frac{x^2y^5z + x^2yz^5 - x^2y^5z}{(x^4+y^4+z^4)^2} & \frac{x^6y^2 + x^2y^6 - 3x^2y^2z^4}{(x^4+y^4+z^4)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. In $(0,0,0)$ ist die Funktion g nicht differenzierbar, aber wenigstens partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0,0) = 0.$$

$\square$

Aufgabe 2 (Richtungsableitung)

(a) Gegeben sei die Funktion f durch

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, \text{ für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ für } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a1) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen der Funktion f auf $\mathbb{R}^2$.

(a2) Zeigen Sie, dass die Funktion $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right) \backslash C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ ist.

(b) Gegeben sei die Funktion f und die Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ durch:

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2 + 3xy - 5y^2 \text{ und } \vec{v} := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert und berechnen Sie diese.

Lösung von Aufgabe 2

(a) (a1) **Schritt 1.** Partielle Ableitung auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
Die Funktion $f|_{\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}}$ ist als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ laut Produkt- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right](x,y) = \frac{\left[y\left(x^2-y^2\right) + xy\cdot 2x\right]\cdot\left(x^2+y^2\right) - xy\left(x^2-y^2\right)\cdot(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{y\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right) + 2x^2y\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{y\left(x^4-y^4\right) + 2x^4y + 2x^2y^3 - 2x^4y + 2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4y - y^5 + 2x^4y + 2x^2y^3 - 2x^4y + 2x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.\end{aligned}$$

Partielle Ableitung nach y:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ laut Produkt- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}\right](x,y) = \frac{\left[x\left(x^2-y^2\right) + xy\cdot(-2y)\right]\cdot\left(x^2+y^2\right) - xy\left(x^2-y^2\right)\cdot(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x\left(x^4-y^4\right) - 2x^3y^2 - 2xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^5 - xy^4 - 2x^3y^2 - 2xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x).\end{aligned}$$

Schritt 2. Partielle Ableitung in $(0,0)$
Partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $h \neq 0$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{f(h,0) - 0}{h} = \frac{\frac{h\cdot 0\cdot\left(h^2-0^2\right)}{h^2+0^2}}{h} = \frac{\frac{0}{h^2+0}}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \to 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach x ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Partielle Ableitung nach y:
Es gilt für alle $h \neq 0$:

$$\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \frac{f(0,h)-0}{h} = \frac{\frac{0\cdot h\cdot\left(0^2-h^2\right)}{h^2+0^2}}{h} = \frac{\frac{0}{h^2+0}}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 \to 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach y ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.$$

Schritt 3. Partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
Da nun beide partiellen Ableitungen in allen Punkten vom $\mathbb{R}^2$ existieren, ist die Funktion f partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \text{ falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Des weiteren gilt die Symmetriebeziehung:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\square$

(a2) **Schritt 1.** Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
Die beiden partiellen Ableitungen, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$, sind als Komposition stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ stetig.
Nach dem hinreichenden Kriterium für Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit der Ableitung:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
Schritt 2. Differenzierbarkeit in $(0,0)$
Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$
Wegen der Dreiecksungleichung vom Betrag erhalten wir für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} - 0\right| = \left|\frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right| = \frac{\left|x^4y-y^5+4x^2y^3\right|}{\left|\left(x^2+y^2\right)^2\right|} \leq \frac{\left|x^4y\right|+\left|y^5\right|+\left|4x^2y^3\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{\left|x^4\right||y|+\left|y^5\right|+|4|\left|x^2\right|\left|y^3\right|}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{|x|^4|y|+|y|^5+4|x|^2|y|^3}{\left(|x|^2+|y|^2\right)^2} \\ &\leq \frac{\max\{|x|,|y|\}^4\max\{|x|,|y|\}+\max\{|x|,|y|\}^5+4\max\{|x|,|y|\}^2\max\{|x|,|y|\}^3}{\left(\max\{|x|,|y|\}^2\right)^2} \\ &= \frac{\max\{|x|,|y|\}^5+\max\{|x|,|y|\}^5+4\max\{|x|,|y|\}^5}{\max\{|x|,|y|\}^4} = \frac{6\max\{|x|,|y|\}^5}{\max\{|x|,|y|\}^4} = 6\max\{|x|,|y|\} \leq 6\left(|x|+|y|\right). \end{aligned}$$

Es folgt nun damit für $(x,y) \to (0,0)$:

$$0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| \leq 6\left(|x|+|y|\right) \to 6\left(|0|+|0|\right) = 6\left(0+0\right) = 6\cdot 0 = 0,$$

d.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ ist stetig in $(0,0)$.
Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial f}{\partial y}$ in $(0,0)$
Setze die Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (y,x)\,.$$

Dann ist die Funktion h stetig auf $\mathbb{R}^2$, insbesondere in $(0,0)$ mit $h(0,0) = (0,0)$. Wegen der Beziehung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

und der Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x}$ in $(0,0)$ folgt nun für $(x,y) \to (0,0)$ als Verkettung von stetigen Funktionen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(h(x,y)) \to -\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -0 = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

d.h. die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ ist stetig in $(0,0)$.
Zusammengefasst haben wir nun, dass die partiellen Ableitungen, $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$, stetig auf $\mathbb{R}^2$ sind.
Nach dem hinreichenden Kriterium für Differenzierbarkeit folgt nun, dass die Funktion f stetig differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2$ mit der Ableitung:

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^5 - xy^4 - 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und

$$f'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Also ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
Schritt 3. f nicht zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
Wir zeigen, dass die Funktion f bzgl.x zweimal partiell differenzierbar ist auf $\mathbb{R}^2$, aber die Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ist unstetig in $(0,0)$.
Die Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ ist als Komposition partiell differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Zweifache partielle Ableitung nach x:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ laut Produkt- und Quotientenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right](x,y) = \frac{(4x^3y + 8xy^3)\cdot(x^2+y^2)^2 - (x^4y - y^5 + 4x^2y^3)\cdot(2\cdot(x^2+y^2)\cdot(2x))}{\left((x^2+y^2)^2\right)^2} \\ &= \frac{(4x^3y + 8xy^3)\cdot(x^4 2x^2y^2 + y^4) - 4x(x^6y - x^2y^5 + 4x^4y^3 + x^4y^3 - y^7 + 4x^2y^5)}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{4x^7y + 8x^5y^3 + 4x^3y^5 + 8x^5y^3 + 16x^3y^5 + 8xy^7 - 4x^7y + 4x^3y^5 - 16x^5y^3 - 4x^5y^3 + 4xy^7 - 16x^3y^5}{(x^2+y^2)^4} \\ &= \frac{8x^3y^5 - 8x^5y^3 + 4x^5y^3 + 12xy^7}{(x^2+y^2)^4}.\end{aligned}$$

Zweifache partielle Ableitung nach x in $(0,0)$:
Es gilt für alle $h \neq 0$:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) - 0}{h} = \frac{\frac{8h^3\cdot 0^5 - 8h^5\cdot 0^3 + 4h^5\cdot 0^3 + 12h\cdot 0^7}{(h^2+0^2)^4}}{h} = \frac{\frac{8h^3\cdot 0 - 8h^5\cdot 0 + 4h^5\cdot 0 + 12h\cdot 0}{(h^2+0)^4}}{h} = \frac{\frac{0-0+0+0}{(h^2)^4}}{h} = \frac{\frac{0}{h^8}}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

Also folgt nun für $h \to 0$:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0 \to 0,$$

d.h. f ist in $(0,0)$ partiell nach x ableitbar mit partieller Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0+h,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0.$$

Unstetigkeit von $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ in $(0,0)$:
Setze dazu

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt:

$$\lim_{n\ to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und } \lim_{n\ to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

d.h. es ist:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0).$$

Andererseits gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_n, y_n) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{8\left(\frac{1}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^5 - 8\left(\frac{1}{n}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{n}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + 12\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^7}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^4} \\ &= \frac{8 \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n^5} - 8 \cdot \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{n^3} + 4 \cdot \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{n^3} + 12 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^7}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^4} = \frac{\frac{8}{n^8} - \frac{8}{n^8} + \frac{4}{n^8} + \frac{12}{n^8}}{\left(\frac{2}{n^2}\right)^4} = \frac{\frac{16}{n^8}}{\frac{16}{n^8}} = 1.\end{aligned}$$

Nun folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0),$$

d.h. die Funktion $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ist nicht stetig in $(0,0)$. Damit gilt:

$$f \notin C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right).$$

Schritt 4. Zusammenfassung
Aus $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ und $f \notin C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ folgt also

$$f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right) \backslash C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right).$$

□

(b) Setze erst

$$\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}.$$

Bis auf den "finalen Schritt" gibt es im Grunde hier zwei Ansätze:
Ansatz 1. Direkt per Definition
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g((x,y) + h\vec{u}) - g(x,y) &= g((x,y) + h(1,2)) - g(x,y) = g((x,y) + (h, 2h)) - g(x,y) = g(x+h, y+2h) - g(x,y) \\ &= (x+h)^2 + 3(x+h)(y+2h) - 5(y+2h)^2 - \left(x^2 + 3xy - 5y^2\right) \\ &= \left(x^2 + 2hx + h^2\right) + 3\left(xy + 2hx + hy + 3h^2\right) - 5\left(y^2 + 4hy + 4h^2\right) - x^2 - 3xy + 5y^2 \\ &= x^2 + 2hx + h^2 + 3xy + 6hx + 3hy + 9h^2 - 5y^2 - 20hy - 20h^2 - x^2 - 3xy + 5y^2 \\ &= 8hx - 17hy - 10h^2 = h(8x - 17y - 10h). \end{aligned}$$

Dann folgt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{g((x,y) + h\vec{u}) - g(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(8x - 17y - 10h)}{h} = \mathrm{lm}_{h\to 0}(8x - 17y - 10h) = 8x - 17y - 10 \cdot 0 \\ &= 8x - 17y - 0 = 8x - 17y.\end{aligned}$$

Ansatz 2. Als Matrix-Vektor-Produkt
Als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ ist die Funktion g stetig differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 + 3xy - 5y^2\right](x,y) = 2x + 3y, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 + 3xy - 5y^2\right](x,y) = 3x - 10y\end{aligned}$$

bzw. die Ableitung

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y & 3x - 10y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Laut dem Notwendigkeitskriterium für Differenzierbarkeit folgt nun:

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(x,y) = g'(x,y) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2x + 3y & 3x - 10y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2x + 3y) \cdot 1 + (3x - 10y) \cdot 2 = 2x + 3y + 6x - 20y = 8x - 17y$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Finaler Schritt: Richtungsableitung $\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(x, y)$ berechnen
Wegen

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{u}$$

folgt nun aus der Vorlesung:

$$\frac{\partial g}{\partial \vec{v}}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{u} \right)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{\partial g}{\partial \vec{u}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(8x - 17y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Aufgabe 3 (Lokaler Umkehrsatz)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-y} \\ \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass um den Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in V_1$ und eine offene Umgebung $V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(2,1) \in V_2$ existieren so, dass die Abbildung $f|_{V_1}\colon V_1 \to V_2$ bijektiv ist.

(b) Berechnen Sie für die Umkehrfunktion $\left(f|_{V_1}\right)^{-1} : V_2 \to V_1$ die Ableitung im Punkt $(2,1)$.

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1.** Stetige Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$
Die Funktion f ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Partielle Ableitungen nach x:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-y}\right](x,y) = \mathrm{e}^x,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Partielle Ableitungen nach y:
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-y}\right](x,y) = -\mathrm{e}^{-y},$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^{x+y}\right](x,y) = \mathrm{e}^{x+y}.$$

Schritt 3. Ableitung f' aufstellen
Die Funktion f ist (stetig) differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-y} \\ \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y} \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Determinante $\det(f'(0,0)) \neq 0$ zeigen
Es gilt:

$$\det(f'(0,0)) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^0 & -\mathrm{e}^{-0} \\ \mathrm{e}^{0+0} & \mathrm{e}^{0+0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\mathrm{e}^0 \\ \mathrm{e}^0 & \mathrm{e}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 1 + 1 = 2 \neq 0.$$

Schritt 5. Lokalen Umkehrsatz zitieren
Wegen $\det(f'(0,0)) \neq 0$ ist die Ableitungsmatrix $f'(0,0) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ regulär. Weiter gilt:

$$f(0,0) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0} \\ \mathrm{e}^{0+0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^0 \\ \mathrm{e}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir haben nun $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2\right)$, $U := \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist offen mit $f'(0,0)$ regulär. Nach dem lokalen Umkehrsatz folgt nun, dass es offene Umgebungen $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $(0,0) \in V_1$ und $(2,1)^T = f(0,0) \in V_2$ so, dass die Restriktion & co-Restriktion

$$f|_{V_1}\colon V_1 \to V_2 \text{ bijektiv ist.}$$

Dies war zu zeigen. □

(b) **Schritt 1.** $f'(0,0)^{-1}$ berechnen
Da die Matrix $f'(0,0)$ regulär ist, ist diese invertierbar und wir erhalten nach der Cramerschen Regel für 2×2-Matrizen:

$$f'(0,0)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^0 & -\mathrm{e}^{-0} \\ \mathrm{e}^{0+0} & \mathrm{e}^{0+0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{e}^0 \\ \mathrm{e}^0 & \mathrm{e}^0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(f'(0,0))}\begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

wegen $\det\left(f'\left(0,0\right)\right) = 2$.
Schritt 2. Lokalen Umkehrsatz zitieren
Da die Funktion

$$f|_{V_1} : V_1 \to V_2$$

bijektiv ist, besitzt sie eine Umkehrfunktion

$$\left(f|_{V_1}\right)^{-1} : V_2 \to V_1.$$

Laut dem lokalen Umkehrsatz ist diese Umkehrfunktion $\left(f|_{V_1}\right)^{-1}$ stetig differenzierbar mit der Ableitung:

$$\left(\left(f|_{V_1}\right)^{-1}\right)'(x,y) = f'\left(\left(f|_{V_1}\right)^{-1}(x,y)\right)^{-1}$$

für alle $(x,y) \in V_2$. Aus

$$f\left(0,0\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_2$$

folgt nun

$$\left(f|_{V_1}\right)^{-1}(2,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V_1.$$

Also haben wir für die Ableitung der Umkehrfunktion $\left(f|_{V_1}\right)^{-1}$ im Punkt $(2,1)$:

$$\left(\left(f|_{V_1}\right)^{-1}\right)'(2,1) = f'\left(\left(f|_{V_1}\right)^{-1}(2,1)\right)^{-1} = f'\left(0,0\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies war zu zeigen. $\square$