27.05.2020
apl. Prof. Dr. Peer Kunstmann
Dr. Semjon Wugalter
M.Sc. Michael Ullmann

Karlsruhe Institute of Technology

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Tutoriumsblatt

Aufgabe 1 (Implizit-definite Funktionen)

Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto z^5 + xz^3 - 2z^2 + xyz - xy^2 + 3.$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$f(x,y,z) = 0$$

in einer gewissen offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ um den Punkt $(0,1)$ eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon V \to \mathbb{R}$ existiert mit $g(0,1) = -1$ und

$$f(x,y,g(x,y)) = 0 \text{ für alle } (x,y) \in V.$$

Berechnen Sie anschließend die Ableitung von g allgemein und im Punkt $(0,1)$.

Lösung von Aufgabe 1

Schritt 1. Stetige Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^3$
Die Funktion f ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Es gilt für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[z^5 + xz^3 - 2z^2 + xyz - xy^2 + 3\right](x,y,z) = z^3 + yz - y^2,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[z^5 + xz^3 - 2z^2 + xyz - xy^2 + 3\right](x,y,z) = xz - 2xy,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left[z^5 + xz^3 - 2z^2 + xyz - xy^2 + 3\right](x,y,z) = 5z^4 + 3xz^2 - 4z + xy.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Ableitung f' aufstellen
Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^3 + yz - y^2 & xz - 2xy & 5z^4 + 3xz^2 - 4z + xy \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Schritt 4. Determinante $\det\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)\right) \neq 0$ zeigen
Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(0,1,-1) &= \begin{pmatrix} (-1)^3 + 1\cdot(-1) - 1^2 & 0\cdot(-1) - 2\cdot 0\cdot 1 & 5\cdot(-1)^4 + 3\cdot 0\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) + 0\cdot 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -1-1-1 & 0-0 & 5\cdot 1 + 0 + 4 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 9 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h.

$$\frac{\partial f}{\partial (x,y)}(0,1,-1) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1) = \begin{pmatrix} 9 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt nun:

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)\right) = \det\begin{pmatrix}9\end{pmatrix} = 9 \neq 0.$$

Schritt 5. Satz über implizit-definite Funktionen zitieren
Wegen $\det\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)\right) \neq 0$ ist die Matrix $\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ regulär. Weiter gilt:

$$f(0,1,-1) = (-1)^5 + 0\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 0\cdot 1\cdot(-1) - 0\cdot 1^2 + 3 = -1+0-2\cdot 1+0-0+3 = 2-2 = 0.$$

Wir haben nun: $n=3,\ m=1,\ p=3-1=2,\ U:=\mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $(x_0,y_0):=(0,1),\ z_0:=-1,\ f\in C^1(U,\mathbb{R})$ mit $(x_0,y_0,z_0)\in U$ und

$$f(x_0,y_0,z_0) = f(0,1,-1) = 0,$$

sowie

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)$$

regulär. Laut dem Satz über implizit-definite Funktionen gibt es offene Umgebungen $V_1 \subseteq \mathbb{R}^2$, $V_2 \subseteq \mathbb{R}$ mit $(x_0,y_0) = (0,1) \in V_1$, $z_0 = -1 \in V_2$, sowie eine stetig differenzierbare Funktion

$$g\colon V_1 \to V_2$$

mit

$$g(0,1) = g(x_0,y_0) = z_0 = -1$$

und für alle $(x,y,z)\in V_1\times V_2$ gilt:

$$f(x,y,z) = 0 \ \Leftrightarrow\ z = g(x,y).$$

Setze $V := V_1$, so gilt:

$$f(x,y,g(x,y)) = 0$$

für alle $(x,y)\in V$.
Schritt 6. Ableitung $g'(0,1)$ berechnen
Laut dem Satz über implizit-definite Funktionen gilt für alle $(x,y)\in V$:

$$\begin{aligned}
g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y))\\
&= -\left(5g(x,y)^4 + 3xg(x,y)^2 - 4g(x,y) + xy\right)^{-1}\begin{pmatrix}g(x,y)^3 + yg(x,y) - y^2 & xg(x,y) - 2xy\end{pmatrix}\\
&= -\frac{1}{5g(x,y)^4 + 3xg(x,y)^2 - 4g(x,y) + xy}\begin{pmatrix}g(x,y)^3 + yg(x,y) - y^2 & xg(x,y) - 2xy\end{pmatrix}\\
g'(0,1) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,1,-1) = -9^{-1}\begin{pmatrix}-3 & 0\end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\cdot(-3)\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 2 (Lokale Extremwerte)

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremwerte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \left(x^2+2y^2\right) \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

auf $\mathbb{R}^2$, und entscheiden Sie danach, ob es sich um Maxima bzw. Minima handelt.

(b) Begründen Sie, dass die Funktion

$$g\colon\ [0,5]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2$$

auf der Menge $K := [0,5]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Minimum und ein Maximum besitzt und berechnen Sie diese anschließend. (**Hinweis**: Für den Rand von K überlegen Sie, wie Sie jeweils die vier Seiten von dem Quadrat beschreiben können.)

Lösung von Aufgabe 2

(a) **Schritt 1.** f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$
Die Funktion f ist als Komposition zweimal stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^2$ wieder zweimal stetig differenzierbar.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Es gilt für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right](x,y) = 2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \left(x^2+2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot(-2x) = 2x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(x^2+2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right](x,y) = 2\cdot 2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + \left(x^2+2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot(-2y) = 2y\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right](x,y)\\
&= 2\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 2x\,(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 2x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot(-2x)\\
&= 2\left(1-x^2-2y^2-2x^2-2x^2+2x^4+4x^2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 2\left(1-5x^2-2y^2+2x^4+4x^2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2y\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right](x,y)\\
&= 2\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 2y\,(-2\cdot 2y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 2y\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)\\
&= 2\left(2-x^2-2y^2-4y^2-4y^2+x^2y^2+4y^4\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[2x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\right](x,y)\\
&= 2x\,(-2\cdot 2y)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} + 2x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\cdot(-2y)\\
&= -4xy\left(2+1-x^2-2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = -4xy\left(3-x^2-2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

Da die Funktion f zweimal stetig differenzierbar ist, folgt nach dem Satz von Schwartz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = -4xy\left(3-x^2-2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}.$$

Schritt 3. Erste Ableitung null setzen
Wir lösen für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{grad}(f)(x,y) = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 2x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\\ 2y\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; 2\begin{pmatrix} x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\\ y\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} x\left(1-\left(x^2+2y^2\right)\right)\\ y\left(2-\left(x^2+2y^2\right)\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir sehen direkt, dass im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ der Gradient von f verschwindet, also $\operatorname{grad}(f)(0,0) = \vec{0}$. Für die weiteren kritischen Punkte machen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1. $x \neq 0$:
Dann ist:

$$0 = x\left(1 - \left(x^2 + 2y^2\right)\right) \;\Leftrightarrow\; 1 - \left(x^2 + 2y^2\right) = 0,$$

und damit folgt nun:

$$0 = y\left(2 - \left(x^2 + 2y^2\right)\right) = y\left(1 + 1 - \left(x^2 + 2y^2\right)\right) = y\,(1 + 0) = y \cdot 1 = y.$$

Also erhalten wir:

$$0 = 1 - \left(x^2 + 2y^2\right) \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2 \cdot 0^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2 \cdot 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 0 = 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \text{ oder } x = 1.$$

In diesem Fall erhalten wir zwei weitere kritische Punkte:

$$(-1, 0) \;\text{ und }\; (1, 0)\,.$$

Fall 2. $y \neq 0$:
Dann ist:

$$0 = y\left(2 - \left(x^2 + 2y^2\right)\right) \;\Leftrightarrow\; 2 - \left(x^2 + 2y^2\right) = 0 \Leftrightarrow\; x^2 + 2y^2 = 2.$$

und damit folgt nun:

$$0 = x\left(1 - \left(x^2 + 2y^2\right)\right) = x\,(1 - 2) = x\,(-1) = -x,$$

d.h. $x = 0$. Also erhalten wir:

$$2 = x^2 + 2y^2) \;\Leftrightarrow\; 0^2 + 2y^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 0 + 2y^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; 2y^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y = -1 \text{ oder } y = 1.$$

In diesem Fall erhalten wir zwei weitere kritische Punkte:

$$(0, -1) \;\text{ und }\; (0, 1)\,.$$

Wir erhalten also die fünf potenziellen Paare als Extremwertstellen:

$$(0, 0)\,,\; (-1, 0)\,,\; (1, 0)\,, (0, -1) \;\text{ und }\; (0, 1)\,.$$

Schritt 4. Untersuchen der potenziellen Punkte
Potenzieller Punkt 1. $(-1, 0)$:
Die Auswertung im Punkt $(-1, 0)$ in den zweiten Ableitungen der Funktion f ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) &= 2\left(1 - 5 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^2 \cdot 0^2\right) \mathrm{e}^{-(-1)^2 - 0^2} \\
&= 2\,(1 - 5 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0)\,\mathrm{e}^{-1-0} = 2\,(1 - 5 - 0 + 2 + 0)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot (-2) = -\frac{4}{\mathrm{e}}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 0) &= 2\left(2 - (-1)^2 - 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^2 + (-1)^2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0^4\right) \mathrm{e}^{-(-1)^2 - 0^2} \\
&= 2\,(2 - 1 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0)\,\mathrm{e}^{-1-0} = 2\,(1 - 0 - 0 - 0 + 0 + 0)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot 1 = \frac{2}{\mathrm{e}},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 0) = -4 \cdot (-1) \cdot 0\left(3 - (-1)^2 - 2 \cdot 0^2\right) \mathrm{e}^{-(-1)^2 - 0^2} = 0.$$

Nun lautet die Hesse-Matrix der Funktion f im Punkt $(-1, 0)$:

$$H_f\,(-1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist nun:

$$\left(H_f\,(-1, 0)\right)_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = -\frac{4}{\mathrm{e}} < 0,$$

und für die Determinante gilt:

$$\det\left(H_f\,(-1, 0)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{\mathrm{e}}\right) \cdot \frac{2}{\mathrm{e}} - 0 \cdot 0 = -\frac{8}{\mathrm{e}} - 0 = -\frac{8}{\mathrm{e}} < 0,$$

d.h. dass die Hesse-Matrix $H_f\,(-1, 0)$ indefinit ist. Nun folgt nach dem Satz über lokale Extremwerte, dass im Punkt $(-1, 0)$ die Funktion f keinen Extrempunkt hat, sondern einen Sattelpunkt.

Potenzieller Punkt 2. $(1,0)$:
Die Auswertung im Punkt $(1,0)$ in den zweiten Ableitungen der Funktion f ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) &= 2\left(1-5\cdot 1^2-2\cdot 0^2+2\cdot 1^4+4\cdot 1^2\cdot 0^2\right)\mathrm{e}^{-1^2-0^2}\\
&= 2\left(1-5\cdot 1-2\cdot 0+2\cdot 1+4\cdot 1\cdot 0\right)\mathrm{e}^{-1-0} = 2\left(1-5-0+2+0\right)\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\cdot(-2) = -\frac{4}{\mathrm{e}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) &= 2\left(2-1^2-2\cdot 0^2-4\cdot 0^2-4\cdot 0^2+1^2\cdot 0^2+4\cdot 0^4\right)\mathrm{e}^{-1^2-0^2}\\
&= 2\left(2-1-2\cdot 0-4\cdot 0-4\cdot 0+1\cdot 0+4\cdot 0\right)\mathrm{e}^{-1-0} = 2\left(1-0-0-0+0+0\right)\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\cdot 1 = \frac{2}{\mathrm{e}},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,0) = -4\cdot 1\cdot 0\left(3-1^2-2\cdot 0^2\right)\mathrm{e}^{-1^2-0^2} = 0.$$

Nun lautet die Hesse-Matrix der Funktion f im Punkt $(1,0)$:

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist nun:

$$\left(H_f(1,0)\right)_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = -\frac{4}{\mathrm{e}} < 0,$$

und für die Determinante gilt:

$$\det\left(H_f(1,0)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{\mathrm{e}}\right)\cdot\frac{2}{\mathrm{e}} - 0\cdot 0 = -\frac{8}{\mathrm{e}} - 0 = -\frac{8}{\mathrm{e}} < 0,$$

d.h. dass die Hesse-Matrix $H_f(1,0)$ indefinit ist. Nun folgt nach dem Satz über lokale Extremwerte, dass im Punkt $(1,0)$ die Funktion f keinen Extrempunkt hat, sondern einen Sattelpunkt.
Potenzieller Punkt 3. $(0,-1)$:
Die Auswertung im Punkt $(0,-1)$ in den zweiten Ableitungen der Funktion f ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) &= 2\left(1-5\cdot 0^2-2\cdot(-1)^2+2\cdot 0^4+4\cdot 0^2\cdot(-1)^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-(-1)^2}\\
&= 2\left(1-5\cdot 0-2\cdot 1+2\cdot 0+4\cdot 0\cdot 1\right)\mathrm{e}^{-0-1} = 2\left(1-0-2+0+0\right)\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\cdot(-1) = -\frac{2}{\mathrm{e}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) &= 2\left(2-0^2-2\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)^2+0^2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)^4\right)\mathrm{e}^{-0^2-(-1)^2}\\
&= 2\left(2-0-2\cdot 1-4\cdot 1-4\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 1\right)\mathrm{e}^{-0-1} = 2\left(2-2-4-4+0+4\right)\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\cdot(-4)\\
&= -\frac{8}{\mathrm{e}},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,-1) = -4\cdot 0\cdot(-1)\left(3-0^2-2\cdot(-1)^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-(-1)^2} = 0.$$

Nun lautet die Hesse-Matrix der Funktion f im Punkt $(0,-1)$:

$$H_f(0,-1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,-1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,-1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist nun:

$$\left(H_f(0,-1)\right)_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = -\frac{2}{\mathrm{e}} < 0,$$

und für die Determinante gilt:

$$\det\left(H_f(0,-1)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)\cdot\left(-\frac{8}{\mathrm{e}}\right) - 0\cdot 0 = \frac{16}{\mathrm{e}} - 0 = \frac{16}{\mathrm{e}} > 0.$$

Nach dem Satz von Hurwitz folgt nun, dass die Hesse-Matrix $H_f(0,-1)$ negativ definit ist. Nun folgt nach dem Satz über lokale Extremwerte, dass im Punkt $(0,-1)$ die Funktion f ein lokales Extremum besitzt, genauer ein lokales Maximum mit dem Funktionswert:

$$f(0,-1) = \left(0^2+2\cdot(-1)^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-(-1)^2} = (0+2\cdot 1)\,\mathrm{e}^{-0-1} = 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Potenzieller Punkt 4. $(0,1)$:
Die Auswertung im Punkt $(0,1)$ in den zweiten Ableitungen der Funktion f ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) &= 2\left(1-5\cdot 0^2-2\cdot 1^2+2\cdot 0^4+4\cdot 0^2\cdot 1^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-1^2}\\
&= 2\,(1-5\cdot 0-2\cdot 1+2\cdot 0+4\cdot 0\cdot 1)\,\mathrm{e}^{-0-1} = 2\,(1-0-2+0+0)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\cdot(-1) = -\frac{2}{\mathrm{e}},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) &= 2\left(2-0^2-2\cdot 1^2-4\cdot 1^2-4\cdot 1^2+0^2\cdot 1^2+4\cdot 1^4\right)\mathrm{e}^{-0^2-1^2}\\
&= 2\,(2-0-2\cdot 1-4\cdot 1-4\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 1)\,\mathrm{e}^{-0-1} = 2\,(2-2-4-4+0+4)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}\cdot(-4)\\
&= -\frac{8}{\mathrm{e}},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,1) = -4\cdot 0\cdot 1\left(3-0^2-2\cdot 1^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-1^2} = 0.$$

Nun lautet die Hesse-Matrix der Funktion f im Punkt $(0,1)$:

$$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

Damit ist nun:

$$\left(H_f(0,1)\right)_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -\frac{2}{\mathrm{e}} < 0,$$

und für die Determinante gilt:

$$\det\left(H_f(0,1)\right) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\mathrm{e}}\right)\cdot\left(-\frac{8}{\mathrm{e}}\right) - 0\cdot 0 = \frac{16}{\mathrm{e}} - 0 = \frac{16}{\mathrm{e}} > 0.$$

Nach dem Satz von Hurwitz folgt nun, dass die Hesse-Matrix $H_f(0,1)$ negativ definit ist. Nun folgt nach dem Satz über lokale Extremwerte, dass im Punkt $(0,1)$ die Funktion f ein lokales Extremum besitzt, genauer ein lokales Maximum mit dem Funktionswert:

$$f(0,1) = \left(0^2+2\cdot 1^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-1^2} = (0+2\cdot 1)\,\mathrm{e}^{-0-1} = 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Potenzieller Punkt 5. $(0,0)$:
Der Funktionswert von f lautet hier:

$$f(0,1) = \left(0^2+2\cdot 0^2\right)\mathrm{e}^{-0^2-0^2} = (0+2\cdot 0)\,\mathrm{e}^{-0-0} = 0\cdot\mathrm{e}^{-1} = 0.$$

Andererseits gilt für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \left(x^2+2y^2\right)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \geq 0 = f(0,0).$$

Damit liegt im Punkt $(0,0)$ ein globales Minimum vor, und somit auch ein lokales Extremum (genauer ein lokales Minimum).
Zusammenfassung:

- $f\in C^2\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$
- f hat fünf kritische Punkte:
  $$(0,0)\,,\ (-1,0)\,,\ (1,0)\,,(0,-1)\ \text{ und }\ (0,1)\,.$$
- f hat ein lokales/ globales Minimum im Punkt $(0,0)$ mit Funktionswert $f(0,0)=0$.
- f hat ein lokales Maximum in den Punkten $(0,-1)$ und $(0,1)$ mit Funktionswert $f(0,-1)=\frac{2}{\mathrm{e}}=f(0,1)$.
- f hat in den Punkten $(-1,0)$ und $(1,0)$ **kein** Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

$\square$

(b) **Schritt 1.** Untersuchung im Inneren von K

Schritt 1.1. g stetig differenzierbar auf $(0,5)^2$
Die Funktion g ist als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $(0,5)^2$ wieder stetig differenzierbar.
Schritt 1.2. Partielle Ableitungen berechnen
Es gilt für alle $(x,y) \in (0,5)^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2\right](x,y) = 2xy - 4y - 4x, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2\right](x,y) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \end{aligned}$$

laut der zweiten binomischen Formel.
Schritt 1.3. Erste Ableitung null setzen
Wir lösen für $(x,y) \in (0,5)^2$:

$$\operatorname{grad}(g)(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ (x-2)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt nun, dass dazu $x = 2$ sein muss. Damit erhalten wir mit der ersten Gleichung für alle $y \in (0,5)$:

$$2xy - 4y - 4x = 2 \cdot 2y - 4y - 4 \cdot 2 = 4y - 4y - 8 = -8 \neq 0,$$

d.h. für alle $(x,y) \in (0,5)^2$ gilt:

$$\operatorname{grad}(g)(x,y) \neq \vec{0}$$

und damit existiert kein kritischer Punkt in der offenen Menge $(0,5)^2$ und somit auch kein lokales Extremum der Funktion g.
Schritt 2. Existenz von Extremwerten feststellen
Die Menge $K = [0,5]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist kompakt, da die Menge K nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen ist. Die Funktion g ist insbesondere stetig, daher folgt laut Vorlesung, dass das Bild $g(K) \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls kompakt ist und es existieren Maximum und Minimum von g auf der Menge K.
Schritt 3. Betrachtung des Randes
Da dieses Maximum und Minimum nicht im Inneren von K sich befinden kann, müssen diese auf dem Rand angenommen werden.
<u>Parametrisierung von ∂K:</u>
Der Rand des Quadrates K mit den vier Eckpunkten

$$(0,0), (5,0), (5,5) \text{ und } (0,5)$$

wird durch folgende vier Wege beschrieben:

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_2(t) &:= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5t \end{pmatrix}, \\ \gamma_3(t) &:= \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 5t \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(1-t) \\ 5 \end{pmatrix}, \\ \gamma_4(t) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 - 5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5(1-t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für $t \in [0,1]$.

$$\partial K = \overline{B_{\sqrt{2}}(0,0)} \backslash B_{\sqrt{2}}(0,0) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \left\|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{2}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

<u>Parametrisierung einsetzen:</u>
Wir setzen für $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} h_1(t) &= g(\gamma_1(t)) = g(5t,0) = (5t)^2 \cdot 0 - 4 \cdot (5t) \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot (5t)^2 - 2 = 0 - 0 + 0 - 2 \cdot 25t^2 - 2 = -50t^2 - 2, \\ h_2(t) &= g(\gamma_2(t)) = g(5,5t) = 5^2 \cdot (5t) - 4 \cdot 5 \cdot (5t) + 4 \cdot (5t) - 2 \cdot 5^2 - 2 = 25 \cdot 5t - 100t + 20t - 2 \cdot 25 - 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 125t - 80t - 50 - 2 = 45t - 52,\\
h_3(t) &= g(\gamma_3(t)) = g(5(1-t), 5) = (5(1-t))^2 \cdot 5 - 4 \cdot (5(1-t)) \cdot 5 + 4 \cdot 5 - 2 \cdot (5(1-t))^2 - 2\\
&= 5 \cdot 25(1-t)^2 - 100(1-t) + 20 - 2 \cdot 25(1-t)^2 - 2 = 125(1-t)^2 - 100(1-t) + 18 - 50(1-t)^2\\
&= 75(1-t)^2 - 100(1-t) + 18 = 25(1-t)^2 + 50\Big((1-t)^2 - 2(1-t) + 1\Big) - 50 + 18\\
&= 25(1-t)^2 + 50((1-t)-1)^2 - 32 = 25(1-t)^2 + 50(-t)^2 - 32 = 25(1-t)^2 + 50t^2 - 32,\\
h_4(t) &= g(\gamma_4(t)) = g(0, 5(1-t)) = 0^2 \cdot (5(1-t)) - 4 \cdot 0 \cdot (5(1-t)) + 4 \cdot (5(1-t)) - 2 \cdot 0^2 - 2\\
&= 0 \cdot (5(1-t)) - 0 + 20(1-t) - 2 \cdot 0 - 2 = 0 + 20 - 20t - 0 - 2 = 18 - 20t.
\end{aligned}
$$

Ableitung von h_1, h_2, h_3, h_4:
Es gilt für alle $t \in (0,1)$:

$$
\begin{aligned}
h_1'(t) &= 2 \cdot (-50t) = -100t,\\
h_2'(t) &= 45,\\
h_3'(t) &= 2 \cdot (25(1-t)) \cdot (-1) + 2 \cdot (50t) = -50(1-t) + 100t = -50(1-t-2t) = -50(1-3t),\\
h_4'(t) &= -20.
\end{aligned}
$$

Ableitung von h_1, h_2, h_3, h_4 null setzen:
Für alle $t \in (0,1)$ gilt:

$$
h_1'(t) = -100t < 0, h_2'(t) = 45 \neq 0 \text{ und } h_4'(t) = -20 \neq 0
$$

d.h. die Funktionen h_1, h_2 und h_4 haben kein lokales Extremum in $(0,1)$.
Die Menge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, da wegen der Beschränktheit und der Abgeschlossenheit der Menge $[0,1]$ die Kompaktheit aus dem Satz von Heine-Borel folgt. Allerdings sind die Funktionen h_1, h_2 und h_4 insbesondere stetig auf $[0,1]$ und die Menge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, also erhalten wir, dass die Bilder

$$
h_1([0,1]),\ h_2([0,1]),\ h_4([0,1]) \subseteq \mathbb{R}
$$

kompakt sind und somit stets Maximum und Minimum besitzen und annehmen. Da sich dieses nicht im Inneren von $[0,1]$ befinden kann, muss es in den Randpunkten angenommen werden. Es gilt für die Auswertung der Funktionen h_1, h_2, h_4 in den Randpunkten $t = 0, 1$:

$$
\begin{aligned}
h_1(0) &= -50 \cdot 0^2 - 2 = -50 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2,\\
h_1(1) &= -50 \cdot 1^2 - 2 = -50 \cdot 1 - 2 = -50 - 2 = -52,\\
h_2(0) &= 45 \cdot 0 - 52 = 0 - 52 = -52,\\
h_2(1) &= 45 \cdot 1 - 52 = 45 - 52 = -7,\\
h_4(0) &= 18 - 20 \cdot 0 = 18 - 0 = 18,\\
h_4(1) &= 18 - 20 \cdot 1 = 18 - 20 = -2.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
h_1(0) = -2 > -52 = h_1(1),\ h_2(1) = -7 > -52 = h_2(0),\ h_4(0) = 18 > -1 = h_4(1)
$$

ist, gilt:

- Für h_1 globales Minima in $t = 1$ mit Funktionswert $h_1(1) = -52$ und globales Maxima in $t = 0$ mit Funktionswert $h_1(0) = -2$.
- Für h_2 globales Minima in $t = 1$ mit Funktionswert $h_2(0) = -52$ und globales Maxima in $t = 0$ mit Funktionswert $h_2(1) = -7$.
- Für h_4 globales Minima in $t = 1$ mit Funktionswert $h_4(1) = -1$ und globales Maxima in $t = 0$ mit Funktionswert $h_4(0) = 18$.

Mit $t \in (0,1)$ erhalten wir:

$$
h_3'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ -50(1-3t) = 0 \ \Leftrightarrow\ 1 - 3t = 0 \ \Leftrightarrow\ 3t = 1 \ \Leftrightarrow\ t = \frac{1}{3}.
$$

Also hat die Funktion h_3 einen kritischen Punkt in $t = \frac{1}{3} \in (0,1)$. Weiter haben wir für $t \in (0,1)$:

$$
h_3''(t) = -50 \cdot (-3) = 150.
$$

Damit gilt nun:

$$h_3''\left(\frac{1}{3}\right) = 150 > 0,$$

d.h. die Funktion h_3 hat in $t = \frac{1}{3}$ ein lokales Minimum mit dem Funktionswert

$$h_3\left(\frac{1}{3}\right) = 25\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 + 50\cdot\frac{1}{3}^2 - 32 = 25\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 50\cdot\frac{1}{9} - 32 = 25\cdot\frac{4}{9} + \frac{50}{9} - \frac{288}{9} = \frac{100}{9} + \frac{50}{9} - \frac{288}{9} = -\frac{138}{9} = -\frac{46}{3}.$$

Die Funktionen h_3 insbesondere stetig auf $[0,1]$ und die Menge $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, also erhalten wir, dass das Bild $h_3([0,1]) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist und somit stets Maximum und Minimum besitzen und annehmen. Da es nur einen lokalen Extremwert (Minimum) im Inneren von $[0,1]$ gab, muss es noch mindestens einen globalen Extremwert (Maximum) in den Randpunkten von $[0,1]$ geben. Wir untersuchen daher die Funktion h_3 in den Randpunkten $t = 0, 1$:

$$\begin{aligned} h_3(0) &= 25(1-0)^2 + 50\cdot 0^2 - 32 = 25\cdot 1^2 + 50\cdot 0 - 32 = 25\cdot 1 - 32 = 25 - 32 = -7,\\ h_3(1) &= 25(1-1)^2 + 50\cdot 1^2 - 32 = 25\cdot 0^2 + 50\cdot 1 - 32 = 25\cdot 0 + 50 - 32 = 0 + 18 = 18. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Funktionswerte liefert nun wegen

$$h_3(1) = 18 > -7 = h_3(0) = -7 = -\frac{21}{3} > -\frac{46}{3} = h_3\left(\frac{1}{3}\right),$$

dass das globale Minima der Funktion h_3 im Punkt $t = \frac{1}{3}$ mit dem Funktionswert $h_3\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{46}{3}$ und das globale Maxima der Funktion h_3 im Punkt $t = 1$ mit dem Funktionswert $h_3(1) = 18$ liegt.

Schritt 3. Zurück zur Funktion g

Es gilt für für $t = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= \begin{pmatrix} 5\cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\\ \gamma_1(1) &= \begin{pmatrix} 5\cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},\\ \gamma_2(0) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},\\ \gamma_2(1) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},\\ \gamma_3(0) &= \begin{pmatrix} 5(1-0) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix},\\ \gamma_3(1) &= \begin{pmatrix} 5(1-1) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},\\ \gamma_4(0) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5(1-0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},\\ \gamma_4(1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5(1-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und

$$gamma_3\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 5\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot\frac{2}{3} \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen mit Hilfe der globalen Minima der Funktionen h_1, h_2, h_3, h_4 für das globale Minima der Funktion g auf der Menge $[0,5]$:

$$\min\left\{g(x,y) \mid (x,y) \in [0,5]^2\right\} = \min\left\{-52, -52, -\frac{46}{3}, -2\right\} = -52 = h_1(1) = g(\gamma_1(1)) = g(0,5),$$

Wegen

$$h_2(0) = g(\gamma_2(0)) = g(0,5)$$

folgt nun, dass die Funktion g im Punkt $(0,5)$ ein eindeutiges globales Minima hat mit dem Funktionswert

$$g(0,5) = -52.$$

Wir bekommen mit Hilfe der globalen Maxima der Funktionen h_1, h_2, h_3, h_4 für das globale Minima der Funktion g auf der Menge $[0,5]$:

$$\max\left\{g(x,y) \mid (x,y) \in [0,5]^2\right\} = \max\{-2, -7, 18, 18\} = 18 = h_3(1) = g(\gamma_3(1)) = g(5,0),$$

Wegen

$$h_4(0) = g(\gamma_4(0)) = g(5,0)$$

folgt nun, dass die Funktion g im Punkt $(5,0)$ ein eindeutiges globales Maxima hat mit dem Funktionswert

$$g(5,0) = 18.$$

Dies war zu zeigen. $\square$

Aufgabe 3 (Extremwertberechnung unter Nebenbedingungen)

Berechnen Sie das Maximum der Menge

$$M := \{xyz \mid x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z = 1\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Fällt Ihnen eine Interpretation dazu ein? Wie lautet diese?

Lösung von Aufgabe 3

Schritt 0. Setting aufstellen
Wir setzen die Bedingungsfunktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$h(x, y, z) = x + y + z - 1$$

für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, welche durch die obige Menge vorgegeben ist. Weiter definieren wir die Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $F\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xyz, \\ F(x, y, z, \lambda) &= f(x, y, z) + \lambda h(x, y, z) = xyz + \lambda(x + y + z - 1) \end{aligned}$$

für $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$.
Schritt 1. Stetig differenzierbare Funktionen
Die Funktionen f und h sind als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^3$. Weiter ist somit die Funktion F als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}^4$ stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^4$.
Schritt 2. Partielle Ableitungen berechnen
Es gilt für alle $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial x}[xyz + \lambda(x + y + z - 1)](x, y, z, \lambda) = yz + \lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial y}[xyz + \lambda(x + y + z - 1)](x, y, z, \lambda) = xz + \lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial z}[xyz + \lambda(x + y + z - 1)](x, y, z, \lambda) = xy + \lambda, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}[xyz + \lambda(x + y + z - 1)](x, y, z, \lambda) = x + y + z - 1. \end{aligned}$$

Es gilt für alle $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$:

$$\operatorname{grad}(F)(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz + \lambda \\ xz + \lambda \\ xy + \lambda \\ x + y + z - 1 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. Erste Ableitung null setzen
Wir suchen $(x, y, z, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} = \operatorname{grad}(F)(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} yz + \lambda \\ xz + \lambda \\ xy + \lambda \\ x + y + z - 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -yz \\ -xz \\ -xy \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Ist x, y oder z gleich null, dann gilt:

$$f(x, y, z) = xyz = 0.$$

Da wir laut Aufgabenstellung nur an nicht-negativen Komponenten interessiert sind, da in der Menge M gefordert wird, dass $x, y, z \geq 0$ ist, können wir uns auf $x, y, z \geq 0$ beschränken. Also gilt zudem:

$$f(x, y, z) = xyz \geq 0 \text{ für alle } (x, y, z) \in [0, \infty)^3,$$

und

$$f(x, y, z) = xyz > 0 \text{ für alle } (x, y, z) \in (0, \infty)^3,$$

Also müssen, um das Maximum der Menge M zu finden, die Komponenten x, y, z positiv sein. Demnach nehmen wir o.B.d.A. $x, y, z > 0$ an. Also folgt aus

$$-yz = \lambda = -xz,$$

dass $y = x$ ist. Andererseits folgt aus

$$-xz = \lambda = -xy,$$

dass $z = y$ ist. Damit erhalten wir also

$$x = y = z.$$

Aus der letzten Gleichung erhalten wir somit:

$$1 = x + y + z \ \Leftrightarrow\ 1 = x + x + x \ \Leftrightarrow\ 3x = 1 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{3},$$

bzw. weiter:

$$z = y = x = \frac{1}{3}.$$

Schritt 4. Rangbedingung prüfen
Es gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}[x + y + z - 1](x, y, z) = 1, \\
\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}[x + y + z - 1](x, y, z) = 1, \\
\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z}[x + y + z - 1](x, y, z) = 1.
\end{aligned}$$

Also ist

$$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Demnach gilt für den Rang der Ableitungsmatrix:

$$\operatorname{rang}(h'(x, y, z)) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Also hat die Ableitungsmatrix h' auf $\mathbb{R}^3$ stets vollen Rang (Rang gleich 1).
Schritt 5. Lokale Extrema begründen
Setzen wir die Menge

$$T := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

so gilt:

$$M = \{xyz \mid x, y, z \geq 0 \text{ und } x + y + z = 1\} = \{xyz \quad (x, y, z) \in T\}.$$

Weiter ist die Menge T kompakt, da diese nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen ist, wobei die Beschränktheit für $(x, y, z) \in T$ folgendermaßen folgt:

$$\begin{aligned}
1 = x + y + z \geq x + 0 + 0 = x \geq 0, \\
1 = x + y + z \geq 0 + y + 0 = y \geq 0, \\
1 = x + y + z \geq 0 + 0 + z = z \geq 0,
\end{aligned}$$

und daher ist:

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + |z|^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}.$$

Die Funktion f ist insbesondere auf $\mathbb{R}^3$ stetig, d.h. dass das Bild $f(T)$ kompakt ist und ein Minimum und Maximum besitzt. Nun zudem ist die Rangbedingung für h' auf ganz $\mathbb{R}^3$, demnach inbesondere auf T erfüllt. Da die Funktion $f|_T$ nicht konstant ist, gibt es mindestens zwei verschiedene Extremwertstellen. Der einzige kritische Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in T$, welcher

$$f(x_0, y_0, z_0) > 0$$

erfüllt hat, war für

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3},$$

d.h. die Funktion f wird maximal unter der Nebenbedingung T im Punkt $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ mit dem Funktionswert:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

Das Maximum der Menge M ist daher $\frac{1}{27}$, bzw. in Zeichen:

$$\max M = \frac{1}{27}.$$

Interpretation:
Die Nebenbedingung können wir schreiben als

$$x + y + z = 1 \;\Leftrightarrow\; 4\,(x + y + z) = 4 \;\Leftrightarrow\; 4x + 4y + 4z = 4$$

für $x, y, z \in \mathbb{R}$. Wir können nun die Aufgabenstellung so interpretieren, dass ein 4 Meter langer Draht (oder ähnliches) gegeben ist und daraus soll ein möglichst großer/ voluminöser Quader geformt werden. Weitere Fragen dazu, die sich daran dann anschließen, wären: Wie lang müssen dann die Seitenlängen sein? Ist dieser Quader eindeutig? Und wie groß ist sein Volumen?